第21卷第2期　　湖 南 工 业 大 学 学 报　　Vol.21 No.2
2007年3月　　Journal of Hunan University of Technology　　Mar. 2007

振荡函数积分的Fourier级数逼近法

吕　勇，刘兴国

（湖南工业大学 信息与计算科学系，湖南 株洲 412008）

摘　要：振荡函数积分的数值计算，通常采用对非振荡函数建立插值函数，比如样条插值、Gauss点插值等。利用Fourier级数展开的一个经典不等式，建立了一个对振荡函数积分新的求积方法，此方法计算简单，容易实现。

关键词：Fourier级数；振荡函数；数值积分

中图分类号：O174.21　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2007)02-0035-03

The Methods of Fourier Series for Oscillatory Function Integrals

Lv Yong，Liu Xingguo

(Department of Information and Computing Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412008，China)

Abstract: The numerical methods to evaluating the Oscillatory function integrals are usually based on no-oscillatory function to establishing interpolatory fuction, such as spline interpolation and Gauss interpolation. A new quadrature method of oscillatory function integrals is given by using an inequality of Fourier series. This method is simple and very easy to prove.

Key words: Fourier series; Oscillatory function; numerical integrals

振荡函数积分 $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(\omega x) f(x) + \mathrm{i}\sin(\omega x) f(x)\right]\mathrm{d}x$，其中($\omega \geq 0, \mathrm{i}^2 = -1$)，在应用数学、物理学、工程计算等方面有着广泛的应用。众所周知，ω 越大，被积函数 $\sin(\omega x)f(x)$，$\cos(\omega x)f(x)$ 就振荡得越厉害，也就是说，函数与 x 轴的交点就越多。在对振荡函数积分进行数值计算时，如何克服振荡所带来的误差，成为解决这一问题的关键。[1]对这一问题的解决最早要归功于Filon，其后在此基础上出现了很多解决这一问题的方法[2-7]。比如我国著名数学家徐利治先生提出了渐进展开的徐氏公式[2]。本文在前人基础上采用Fourier级数，对非振荡函数 $f(x)$ 有限逼近，并利用一经典不等式进行误差估计。

1　[0,π]上振荡函数积分的数值逼近

为了解决振荡函数积分 $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega x} f(x)\mathrm{d}x$ 的数值计算，我们只考察被积函数 $\sin(\omega x)f(x)$ 在区间[0,π]上的积分运算。

引理1[8]　设 $f(x)$ 在区间[0,π]上有二阶连续导数，且 $f(0)=f(\pi)=0$，若 $f(x)$ 的Fourier级数展开式的部分和为 $S_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$，则

$$\int_0^{\pi}\left[f(x) - S_n(f,x)\right]^2\mathrm{d}x \leq \frac{1}{3(n+1)^3}\int_0^{\pi}\left[f''(x)\right]^2\mathrm{d}x。\tag{1}$$

下面考查在区间[0,π]上，且 $f(0)=f(\pi)=0$ 的振荡函数积分 $\int_0^{\pi} f(x)\sin\omega x\mathrm{d}x$ 的数值求积公式。

因为 $\left|\int_0^{\pi} f(x)\sin\omega x\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} S_n(f,x)\sin\omega x\mathrm{d}x\right| =$

$$\left|\int_0^{\pi}[f(x) - S_n(f,x)]\sin\omega x\mathrm{d}x\right|,$$

由Cauchy-Schwarz不等式和引理1得：

$$\left|\int_0^{\pi} f(x)\sin\omega x\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} S_n(f,x)\sin\omega x\mathrm{d}x\right| \leq$$

收稿日期：2006-12-28

作者简介：吕　勇（1966-），男，重庆垫江人，湖南工业大学讲师，硕士，主要从事微分方程数值解，有限元超收敛方面的教学与研究.

$$\frac{1}{\left[3(n+1)^3\right]^{\frac{1}{2}}}\left(\int_0^{\pi}\left[f''(x)\right]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sin 2\pi\omega}{4\omega}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

若 ω 取整数，即有定理2。

定理2 设 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上有二阶连续导数，且 $f(0)=f(\pi)=0$，若 $f(x)$ 的Fourier级数展开式的部分和为 $S_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx$，则

$$\left|\int_0^{\pi}f(x)\sin\omega x\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}S_n(f,x)\sin\omega x\mathrm{d}x\right|\le$$

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left[3(n+1)^3\right]^{\frac{1}{2}}}\left(\int_0^{\pi}[f''(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}。 \quad (3)$$

通常情况下，如果考察在区间 $[0,\pi]$ 上的振荡函数积分，其被积函数 $f(x)$ 在两个端点并不一定同时为零，即 $f(0)$, $f(\pi)$ 不同时为零。为了利用定理2，我们用线性变换，构造一个新的函数，使它满足定理2的条件，然后利用其结论，就可以建立在区间 $[0,\pi]$ 上的一般情形下的数值求积公式。

构造函数 $g(x)=f(x)-\frac{\pi-x}{\pi}f(0)-\frac{x}{\pi}f(\pi)$，显然 $g(0)=g(\pi)=0$，且 $g''(x)=f''(x)$。记 $g(x)$ 的Fourier级数展开式的部分和为 $S_n(g,x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx$。不妨 ω 取大于0的整数，则有定理3。

定理3 设 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上有二阶连续导数，且 $f(0)$, $f(\pi)$ 不全为零，若 $g(x)=f(x)-\frac{\pi-x}{\pi}f(0)-\frac{x}{\pi}f(\pi)$。记 $g(x)$ 的Fourier级数展开式的部分和 $S_n(g,x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx$，则

$$\left|\int_0^{\pi}f(x)\sin\omega x\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\left[\frac{\pi-x}{\pi}f(0)+\frac{x}{\pi}f(\pi)+S_n(g,x)\right]\sin\omega x\mathrm{d}x\right|\le\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left[3(n+1)^3\right]^{\frac{1}{2}}}\left(\int_0^{\pi}\left[f''(x)\right]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}。 \quad (4)$$

2 [a,b]上振荡函数积分的数值逼近

为了进一步讨论振荡函数积分的数值求积公式，不妨考察更一般的积分区间 $[a,b]$，即振荡函数积分。$\int_a^b f(x)\sin\omega x\mathrm{d}x$。设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，不妨 ω 取大于0的整数。

首先利用换元法将积分区间 $[a,b]$ 变换到 $[0,\pi]$ 上，设 $x=a+\frac{b-a}{\pi}t$，则

$$\int_a^b f(x)\sin\omega x\mathrm{d}x=$$

$$\frac{b-a}{\pi}\int_0^{\pi}f\left(a+\frac{b-a}{\pi}t\right)\sin\omega\left(a+\frac{b-a}{\pi}t\right)\mathrm{d}t。$$

设 $g(t)=f\left(a+\frac{b-a}{\pi}t\right)$，构造函数 $h(t)=g(t)-\frac{\pi-t}{\pi}g(0)-\frac{t}{\pi}g(\pi)$，显然 $h(0)=h(\pi)=0$，且 $h''(t)=g''(t)$。

记 $h(t)$ 的Fourier级数展开式的部分和为 $S_n(h,t)=\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kt$，则

$$\left|\int_0^{\pi}\left[g(t)-\frac{\pi-t}{\pi}g(0)-\frac{t}{\pi}g(\pi)\right]\sin\omega\left(a+\frac{b-a}{\pi}t\right)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}S_n(h,t)\sin\omega\left(a+\frac{b-a}{\pi}t\right)\mathrm{d}t\right|=$$

$$\left|\int_0^{\pi}[h(t)-S_n(h,t)]\sin\omega\left(a+\frac{b-a}{\pi}t\right)\mathrm{d}t\right|\le$$

$$\left(\int_0^{\pi}[h(t)-S_n(h,t)]^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_0^{\pi}\left[\sin\omega\left(a+\frac{b-a}{\pi}t\right)\right]^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\frac{1}{\left[3(n+1)^3\right]^{\frac{1}{2}}}\left(\int_0^{\pi}[g''(t)]^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}M=$$

$$M\left[\frac{(b-a)^3}{3\pi^3(n+1)^3}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b[f''(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中：$M=\left(\int_0^{\pi}\left[\sin\omega\left(a+\frac{b-a}{\pi}t\right)\right]^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$，由此可得到在区间 $[a,b]$ 上振荡函数积分的数值求积公式。

定理4 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，$g(t)=f\left(a+\frac{b-a}{\pi}t\right)$，$t\in[0,\pi]$，$h(t)=g(t)-\frac{\pi-t}{\pi}g(0)-\frac{t}{\pi}g(\pi)$，记 $h(t)$ 的Fourier级数展开式的部分和为 $S_n(h,t)=\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kt$，则

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\omega x\mathrm{d}x-\frac{b-a}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\pi-t}{\pi}g(0)+\frac{t}{\pi}g(\pi)+S_n(h,t)\right]\sin\omega\left(a+\frac{b-a}{\pi}t\right)\mathrm{d}t\right|\le$$

$$M\left[\frac{(b-a)^5}{3\pi^5(n+1)^3}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b\left[f''(x)\right]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}。 \quad (5)$$

M 同上定义。

3 [a,b]区间上复合的逼近求积公式

由于建立了一般情形下振荡函数积分的数值逼

近公式，因此，为了更好地逼近准确值，我们将区间$[a,b]$分为m等份，首先考察每一个单元的逼近求积公式，然后将得到的所有单元的求积公式累加，这样得到区间$[a,b]$上的复合求积公式。

设节点为$a=x_0<x_1<\cdots<x_{m-1}<x_m<b$，其步长$h=\dfrac{b-a}{m}$，那么在单元$[x_{i-1},x_i], i=1,2,\cdots,m$。利用定理4得到：

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin\omega x\mathrm{d}x-\frac{h}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\pi-t}{\pi}g_i(0)+\frac{t}{\pi}g_i(\pi)+S_{n,i}(h_i(t),t)\right]\sin\omega\left(x_{i-1}+\frac{x_i-x_{i-1}}{\pi}t\right)\mathrm{d}t\right|\le$$
$$M\left[\frac{(x_i-x_{i-1})^5}{3\pi^5(n+1)^3}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f''(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=$$
$$M\left[\frac{h^5}{3\pi^5(n+1)^3}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[f''(x)\right]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中：$g_i(t)=f\left(x_{i-1}+\dfrac{h}{\pi}t\right),\quad t\in[0,\pi]$，$h_i(t)=g_i(t)-\dfrac{\pi-t}{\pi}g_i(0)-\dfrac{t}{\pi}g_i(\pi)$。$h_i(t)$的Fourier级数展开式的部分和$S_{n,i}(h_i,t)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{k,i}\sin kt$。

现将每个单元的逼近函数相加，即有定理5。

定理5　设$f(x)$在区间$[a, b]$上有二阶连续导数，$a=x_0<x_1<\cdots<x_{m-1}<x_m<b$是区间$[a,b]$上的等距节点，设$g_i(t)=f\left(x_{i-1}+\dfrac{h}{\pi}t\right),\quad t\in[0,\pi]$，$h_i(t)=g_i(t)-\dfrac{\pi-t}{\pi}g_i(0)-\dfrac{t}{\pi}g_i(\pi)$，$h_i(t)$的Fourier级数展开式的部分和$S_{n,i}(h_i,t)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{k,i}\sin kt$。则

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\omega x\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^{m}\frac{h}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\pi-t}{\pi}g_i(0)+\frac{t}{\pi}g_i(\pi)+S_{n,i}\left(h_i(t),t\right)\right]\sin\omega\left(x_{i-1}+\frac{x_i-x_{i-1}}{\pi}t\right)\mathrm{d}t\right|\le$$
$$M\left[\frac{(b-a)h^4}{3\pi^5(n+1)^3}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b\left[f''(x)\right]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\le$$
$$C\frac{h^2}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\left(\int_a^b\left[f''(x)\right]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},\qquad(6)$$

其中：$M=\max\limits_{1\le i\le m}\left(\int_0^{\pi}\left[\sin\omega\left(x_{i-1}+\dfrac{h}{\pi}t\right)\right]^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$，

$C=M\left(\dfrac{b-a}{3\pi^5}\right)^{\frac{1}{2}}$，步长$h=\dfrac{b-a}{m}$。

不难看出，在对振荡函数积分的数值计算中，我们只需对函数$f(x)$满足二阶连续可导，如果对区间分段求积，在不考虑Fourier级数展开的项数时，它至少具有二阶收敛，因此，在对函数进行Fourier级数展开时，我们不妨只取一项，即$n=1$，此时再求解$S_{n,i}(h_i,t)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{k,i}\sin kt$就非常简单，所以我们的方法计算简单，容易实现。

参考文献：

[1] 李岳生，黄友谦. 数值逼近[M]. 北京：人民教育出版社，1978.

[2] 徐利治，王仁宏，周蕴时. 函数逼近的理论与方法[M]. 上海：上海科学技术出版社，1983.

[3] 李毅夫. 一种新型高效的振荡函数数值积分方法[J]. 计算数学，1992，14 (4): 506-512.

[4] 陆建芳. 奇异函数的Hermite插值求积公式[J]. 浙江工业大学学报，1997，25 (1): 87-92.

[5] Chung K，Evans G A，Webster J R. A method to generate generalized quadrature rules for oscillatory integrals[J]. Appl. Numer.Math，2000，34：21-33.

[6] Iserles A. On the numerical quadrature of highly-oscillating integrals(I):Fourier-transforms[J]. IMA，J. Num. Anal，2004，24：365-391.

[7] Iserles A. On the numerical quadrature of highly-oscillating integrals(Ⅱ):Irregularoscillators[J]. IMA，J. Num. Anal，2005，25：25-44.

[8] 匡继昌. 常用不等式[M]. 长沙：湖南教育出版社，1989.