第21卷第1期
2007年1月

湖 南 工 业 大 学 学 报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.21 No.1
Jan. 2007

一类平面 $2n$+1 次微分系统的定性分析

刘兴国[1,2]，吕 勇[2]

（1. 湖南大学 数学与计量经济学院，湖南 长沙 410082；2. 湖南工业大学 信息与计算科学系，湖南 株洲 412008）

摘 要：对一类平面 $2n+1$ 次微分系统进行定性分析，得到了其有限处奇点和无穷远奇点的性态，证明了系统闭轨的不存在性，并画出了二种参数条件下系统在Poincaré圆盘上的全局结构相图。

关键词：奇点；闭轨；Poincaré变换；全局结构

中图分类号：O175.12　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1008-2611(2007)01-0037-04

Qualitative Analysis for Planar Differential System with 2n+1 Degree

Liu Xingguo[1,2]，Lv Yong[1]

(1. College of Mathematics and Econometrics，Hunan University，Changsha 410082，China；
2. Department of Information and Computing Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412008，China)

Abstract: The nature state of the finite singular points and infinite singular points are obtained in view of qualitative analysis of planar differential system with 2n+1 degree. It proves the nonexistence of the limit cycle and draws a overall picture about global structure on the Poincar-disc.

Key words: singular point；limit cycle；Poincaré transformation；global structure

0 引言

对于一个给定的平面自治系统，要了解轨线的全局结构，必须清楚了解此系统有限远和无限远奇点的性态、闭轨线、极限环及奇异闭轨的有无，极限环的个数及它们的相对位置，鞍点（或高阶奇点）的分界线的去向和分界线的相对位置。而要弄清上述特征并非易事，不仅研究工作困难较大，而且工作量繁多。就平面二次系统而言，对其中的完全Ⅰ类方程，文献[1]的第12节证明了在参数不同的取值情况下，恰好有47种不同的全局结构相图，并且可以画出来，得到这种确定、完整的结果是花费了巨大的劳动的。至于二次系统中的Ⅱ类、Ⅲ类方程，情况更加复杂，还远没有如此完整的结果，文献[1]中说已经得到超过1 000种的拓扑结构相图，并估计这个数字有望超过2 000，可见其研究工作的复杂性。至于平面高次系统其研究工作将更为复杂，已有的研究成果极少。

对于一个给定的平面自治系统，画出它在Poincaré圆盘上全部轨线的总图，称为该系统的全局结构相图，完成这个总图的步骤通常分为：

1）求出系统有限处奇点及判定其类型；2）求出特殊积分直线；3）判断有无闭轨及其位置；4）求出无穷远奇点及它们邻域中轨线分布；5）判定特殊的分界线的走向。

把以上所得的信息标画在Poincaré圆盘上，再按向量场的连续性连接相关轨线，基本上就可画出我们所要的全局结构相图了。

文献[2-5]中，均采用了如下平面三次微分系统作为讨论无穷远点或全局结构的例子：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x(1+x^2-2y^2),\\ \dfrac{dy}{dt}=-y(1-4x^2+3y^2)。\end{cases}$$

收稿日期：2006-10-31
作者简介：刘兴国（1966-），男，湖南岳阳人，湖南工业大学副教授，湖南大学硕士生，主要从事微分方程定性理论方面的研究.

本文在此基础上讨论如下更具一般性的平面 $2n+1$ 次系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x(\lambda+ax^{2n}-2by^{2n})\equiv P(x,y),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-y(\lambda-4ax^{2n}+3by^{2n})\equiv Q(x,y)。\end{cases}\tag{1}$$

其中 a，b 为同号常数(考虑到方程本身结构，a，b 异号时完全可类似地加以讨论，故本文从略)，λ 为常数且 $\lambda\neq 0$ 。借助定性分析的方法，得到了系统有限处奇点和无穷远奇点的性态及极限环的不存在性，并画出了在两种参数条件下该系统在 Poincaré 圆盘上的全局结构相图。

注意到当 a，$b<0$ 时，可通过时间变换 $\tau=-t$ 化为 a，$b>0$ 的情形，只是轨线倒向而已。因而本文仅讨论 a，$b>0$ 的情形。

1 主要结果及证明

为了考察系统（1）的奇点，分 a，$b>0$，$\lambda>0$ 和 a，$b>0$，$\lambda<0$ 两种情形考虑方程组 $\begin{cases}P(x,y)=0\\Q(x,y)=0\end{cases}$ 的解。

定理1 i）当 a，$b>0$，$\lambda>0$ 时，系统（1）共有5个有限处奇点，分别是粗鞍点 O（0，0），稳定的焦点 $A_1\left(\sqrt[2n]{\dfrac{\lambda}{a}},\sqrt[2n]{\dfrac{\lambda}{b}}\right)$ 、$A_2\left(-\sqrt[2n]{\dfrac{\lambda}{a}},\sqrt[2n]{\dfrac{\lambda}{b}}\right)$ 、$A_3\left(-\sqrt[2n]{\dfrac{\lambda}{a}},-\sqrt[2n]{\dfrac{\lambda}{b}}\right)$ 、$A_4\left(\sqrt[2n]{\dfrac{\lambda}{a}},-\sqrt[2n]{\dfrac{\lambda}{b}}\right)$；

ii）当 a，$b>0$，$\lambda<0$ 时，系统（1）共有5个有限处奇点，分别是粗鞍点 O（0，0），不稳定的结点 $B_1\left(\sqrt[2n]{\dfrac{-\lambda}{a}},0\right)$、$B_2\left(-\sqrt[2n]{\dfrac{-\lambda}{a}},0\right)$，稳定的结点 $B_3\left(0,\sqrt[2n]{\dfrac{-\lambda}{3b}}\right)$、$B_4\left(0,-\sqrt[2n]{\dfrac{-\lambda}{3b}}\right)$。

证明 i）当 a，$b>0$，$\lambda>0$ 时，对应系统（1）的线性近似系统系数矩阵的行列式为：

$$\begin{vmatrix}2\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{vmatrix}=-2\lambda^2<0,$$

因而 O 为系统的鞍点，又因 $D(O)=\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}\right)_O=$ $\left[\lambda+(4n+6)ax^{2n}-(6n+7)by^{2n}\right]\Big|_{(0,0)}=\lambda\neq 0$，所以 O（0，0）为粗鞍点。

再将原点分别平移至 A_i（i=1,2,3,4），得其对应线性近似系统 Jacobi 矩阵为（注意到在4个奇点处均有 $ax^{2n}=by^{2n}=\lambda$）：

$$\begin{bmatrix}P_x & P_y\\ Q_x & Q_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\lambda+(4n+2)ax^{2n}-4by^{2n} & -8nbxy^{2n-1}\\ 8nax^{2n-1}y & -\lambda+4ax^{2n}-(6n+3)by^{2n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4n\lambda & -8nbxy^{2n-1}\\ 8nax^{2n-1}y & -6n\lambda\end{bmatrix},$$

有 $q=40n^2\lambda^2>0$，$p=2n\lambda>0$，$p^2-4q=-156n^2\lambda^2<0$。因而 A_i（i=1,2,3,4）均为系统（1）稳定的焦点。

ii）当 a，$b>0$，$\lambda<0$ 时，O（0，0）为粗鞍点，证明同 i）。

将原点平移至 B_i（i=1,2,3,4），得其对应线性近似系统 Jacobi 矩阵为：

$$\begin{bmatrix}P_x & P_y\\ Q_x & Q_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\lambda+(4n+2)ax^{2n}-4by^{2n} & -8nbxy^{2n-1}\\ 8nax^{2n-1}y & -\lambda+4ax^{2n}-(6n+3)by^{2n}\end{bmatrix}。$$

在 $B_1\left(\sqrt[2n]{\dfrac{-\lambda}{a}},0\right)$、$B_2\left(-\sqrt[2n]{\dfrac{-\lambda}{a}},0\right)$ 处（此时 $ax^{2n}=-\lambda$，$y=0$）有：

$$q=\begin{vmatrix}-4n\lambda & 0\\ 0 & -5\lambda\end{vmatrix}=20n\lambda^2>0,$$

$$p=\lambda(4n+5)<0,$$

$$\Delta=\lambda^2(4n-5)^2>0。$$

因而 B_1,B_2 为不稳定的结点。

在 $B_3\left(0,\sqrt[2n]{\dfrac{-\lambda}{3b}}\right)$、$B_4\left(0,-\sqrt[2n]{\dfrac{-\lambda}{3b}}\right)$ 处（此时 $x=0$，$by^{2n}=-\dfrac{\lambda}{3}$）有：

$$q=\begin{vmatrix}\dfrac{10}{3}\lambda & 0\\ 0 & 2n\lambda\end{vmatrix}=\frac{20}{3}n\lambda^2>0,$$

$$p=-\lambda\left(2n+\frac{10}{3}\right)>0,$$

$$\Delta=\lambda^2\left(2n-\frac{10}{3}\right)^2>0。$$

因而 B_3,B_4 为稳定的结点。

定理2 当 a，$b>0$，$\lambda>0$ 时系统（1）不存在极限环和奇异闭轨。

证明 因为 $x=0$(y 轴)和 $y=0$(x 轴)都是系统的解，由解的存在唯一性，知系统（1）不存在任何与坐标轴相交的闭轨。又因为系统（1）对称于 x 轴、y 轴，此种情形下只需讨论第一象限是否存在闭轨就行。用 Dulac 判据，考虑取

$$B(x,y)=x^{\alpha-1}y^{\beta-1},$$

则有：

$BP = 2\lambda x^{\alpha} y^{\beta-1} + 2ax^{\alpha+2n} y^{\beta-1} - 4bx^{\alpha} y^{\beta+2n-1}$，

$BQ = -\lambda x^{\alpha-1} y^{\beta} + 4ax^{\alpha+2n-1} y^{\beta} - 3bx^{\alpha-1} y^{\beta+2n}$，

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} =$$
$$\lambda(2\alpha-\beta)x^{\alpha-1}y^{\beta-1} + a(2\alpha+4n+4\beta)x^{\alpha+2n-1}y^{\beta-1} -$$
$$b(4\alpha+3\beta+6n)x^{\alpha-1}y^{\beta+2n-1}。$$

从而可作如下约定：

$$\begin{cases} 2\alpha-\beta=0, \\ 2\alpha+4n+4\beta\le 0, \\ 4\alpha+3\beta+6n\ge 0。\end{cases}$$

由此可解得$-\frac{6}{10}n \le \alpha \le -\frac{4}{10}n$。

不妨取$\alpha = -\frac{n}{2}, \beta = -n$，即取Dulac函数为

$B(x,y) = x^{-\frac{n+2}{2}} y^{-n-1}$，则有：

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = -nx^{-\frac{n+2}{2}} y^{-n-1}(ax^{2n}+by^{2n})。$$

上式的值在第一象限内恒小于零，知系统在第一象限内无闭轨，由对称性知其在全平面上无闭轨，故系统在全平面上不存在极限环。

同时，由以上讨论及此种参数条件下系统奇点位置和性态即知系统也不存在任何奇异闭轨。

定理3 当a，$b>0$，$\lambda<0$时系统（1）不存在极限环但存在奇异闭轨。

证明 极限环的不存在性类似定理2的证明，故此处证明从略。此种参数条件下，系统有奇点O（0，0），且为鞍点；还有x轴上的奇点$B_1\left(\sqrt[2n]{\frac{-\lambda}{a}},0\right)$、$B_2\left(-\sqrt[2n]{\frac{-\lambda}{a}},0\right)$，且为不稳定的结点；有$y$轴上的奇点$B_3\left(0,\sqrt[2n]{\frac{-\lambda}{3b}}\right)$、$B_4\left(0,-\sqrt[2n]{\frac{-\lambda}{3b}}\right)$，且为稳定的结点。分析各奇点邻域内轨线走向及全平面轨线趋势，不难看出，存在由奇点和轨线所构成的奇异闭轨。

定理4 当a，$b>0$时，系统（1）于Poincaré圆盘上有2对无穷远奇点，它们均为鞍点，且其几何位置和性态与参数λ无关。

证明 对系统(1)作Poincaré变换，$x=\frac{1}{z}$，$y=\frac{u}{z}$；即$u=\frac{y}{x}$，$z=\frac{1}{x}$。

将系统（1）化为：

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{2au-3\lambda uz^{2n}+bu^{2n+1}}{z^{2n}}, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{-2az+4bzu^{2n}-2\lambda z^{2n+1}}{z^{2n}}。\end{cases} \tag{2}$$

令$d\tau = \frac{dt}{z^{2n}}$，则将系统（2）进一步化为：

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = 2au-3\lambda uz^{2n}+bu^{2n+1} \equiv P^*(u,z), \\ \frac{dz}{d\tau} = -2az+4bzu^{2n}-2\lambda z^{2n+1} \equiv Q^*(u,z)。\end{cases} \tag{3}$$

解$\begin{cases} P^*(u,0)=2au+bu^{2n+1}=0 \\ Q^*(u,0)=0 \end{cases}$得系统（3）在$u$轴上($z$=0)有唯一奇点$C$（0,0），易知$C$（0,0）为鞍点，且其几何位置与性态同参数$\lambda$无关。

再对系统(1)作第二个Poincaré变换，$x=\frac{v}{z}$，$y=\frac{1}{z}$；即$v=\frac{x}{y}$，$z=\frac{1}{y}$。

将系统（1）化为：

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{-bv+3\lambda vz^{2n}-2av^{2n+1}}{z^{2n}}, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{3bz-4azv^{2n}+\lambda z^{2n+1}}{z^{2n}}。\end{cases} \tag{4}$$

再令$d\tau = \frac{dt}{z^{2n}}$，则将式（4）进一步化为：

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\tau} = -bv+3\lambda vz^{2n}-2av^{2n+1} \equiv P^{**}(v,z), \\ \frac{dz}{d\tau} = 3bz-4bzv^{2n}+\lambda z^{2n+1} \equiv Q^{**}(v,z)。\end{cases} \tag{5}$$

解$\begin{cases} P^{**}(v,0)=-bv-2av^{2n+1}=0 \\ Q^{**}(v,0)=0 \end{cases}$知系统（4）在$z$=0上有奇点$D$（0,0），易知$D$（0,0）为鞍点，且其几何位置与性态同参数$\lambda$无关。

2 全局结构相图

由于z=0是系统（3）的解，故赤道由奇点和轨线组成。而坐标轴x=0, y=0是系统（1）的解，所以两个无穷远鞍点的分界线明显落在这些解上。同时注意到$d\tau = \frac{dt}{z^{2n}}$，因而$C'$，$D'$的对称点$C''$，$D''$邻域内轨线不倒向。

综合以上信息就能画出系统（1）在参数条件a，$b>0$，$\lambda>0$和a，$b>0$，$\lambda<0$下，于Poincaré圆盘上的全局结构相图（具体见图1，图2）。

按照完全类似的讨论方法我们分析得到了与系统（1）并不拓扑等价的系统：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x\left(\lambda+ax^{2n}-2by^{2n}\right); \\ \frac{dy}{dt} = y\left(\lambda-4ax^{2n}+3by^{2n}\right)。\end{cases} \tag{6}$$

于同样参数条件下的全局相图（具体见图3，图4）。

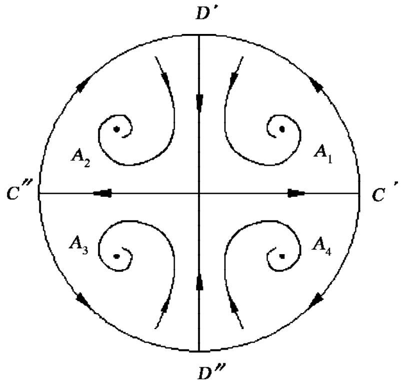

图 1 系统(1)当 a，$b > 0$，$\lambda > 0$ 时全局相图

Fig. 1 Global phase portrait of system(1) when $a,b > 0$，$\lambda > 0$

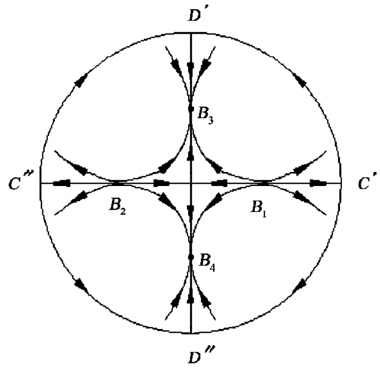

图 2 系统(1)当 a，$b > 0$，$\lambda < 0$ 时全局相图

Fig. 2 Global phase portrait of system(1) when $a,b > 0$，$\lambda < 0$

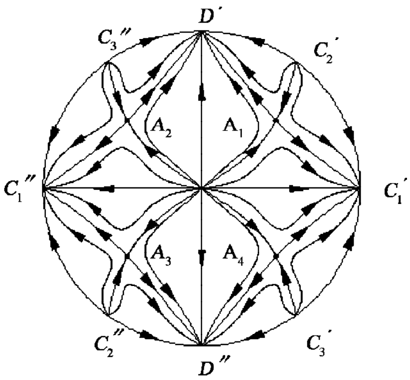

图 3 系统(6)当 a，$b > 0$，$\lambda > 0$ 时全局相图

Fig. 3 Global phase portrait of system(6) when $a,b > 0$，$\lambda > 0$

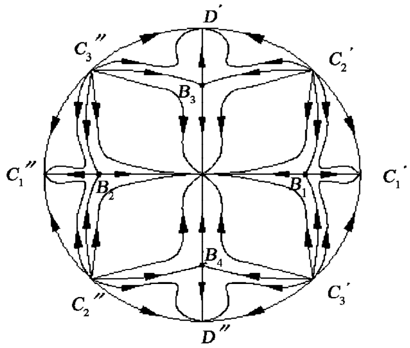

图 4 系统(6)当 a，$b > 0$，$\lambda < 0$ 时全局相图

Fig. 4 Global phase portrait of system(6) when $a,b > 0$，$\lambda < 0$

参考文献：

[1] 叶彦谦. 多项式微分定性理论[M]. 上海：上海科学技术出版社，1995：319-330.

[2] 张芷芬，丁同仁，黄文灶，等. 微分方程定性理论[M]. 北京：科学出版社，1985：393-394.

[3] 张锦炎，冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 北京：北京大学出版社，2000：101-103.

[4] 钱祥征，戴斌祥，刘开宇. 非线性常微分方程理论-方法-应用[M]. 长沙：湖南大学出版社，2006：129-130.

[5] 马知恩，周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京：科学出版社，2001：192-194.