doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2020.02.015

一类拟线性时标动力方程的 Lyapunov 型不等式

张启明，周　欣

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：在一定边值条件下，建立了一类拟线性时标动力方程的 Lyapunov 型不等式，推广并改进了包括连续和离散情形的相关结果。

关键词：拟线性；时标；动力方程；Lyapunov 型不等式

中图分类号：O175 .1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2020)02-0087-05

引文格式：张启明，周　欣 . 一类拟线性时标动力方程的 Lyapunov 型不等式 [J]. 湖南工业大学学报，2020，34(2)：87-91.

Lyapunov Inequalities for a Class of Quasilinear Time-Scaled Dynamic Equations

ZHANG Qiming，ZHOU Xin

（College of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：Under certain boundary value conditions, some Lyapunov inequalities are to be established for a class of quasilinear time-scaled dynamic equations, thus generalizing and improving the related results including continuous and discrete cases.

Keywords：quasilinear；time scale；dynamic equation；Lyapunov inequality

1　研究背景

经典的 Lyapunov 不等式是指在特定的边值条件下，Hill 型方程有非平凡解时需满足的必要条件。该不等式最初由俄国数学力学家李亚普列夫 [1]，于 1907 年在考虑常微分方程的解的稳定性时提出。即有如下引理 1。

引理 1[1]　设 $q(t)$ 是 $[a, b]$ 上实值连续函数，若 Hill 型方程

$$x''(t)+q(t)x(t)=0 \tag{1}$$

存在非平凡实解 $x(t)$，且满足边值条件

$$x(a)=x(b)=0,\ x(t)\neq 0,\ t\in(a,b), \tag{2}$$

则有

$$(b-a)\int_a^b |q(t)|\mathrm{d}t>4, \tag{3}$$

其中不等式（3）右边的下界“4”不能被更大的常数代替。

人们称不等式（3）为经典的 Lyapunov 不等式。此后，不等式（3）被推广到许多的方程和系统中，这些改进或推广后所得的 Lyapunov 不等式即为 Lyapunov 型不等式。

20 世纪 80 年代，德国学者 S. Hilger 最先在其博士论文 [2] 中提出了时标的概念，并建立了一些基本的时标理论。此后，时标理论在文献 [2-4] 的基础上得到蓬勃发展。其中，B. Kaymakcalan 在 1996 年出版的著作 [5] 中，建立了时标上动力方程的 Lyapunov

收稿日期：2019-09-11

基金项目：湖南省自然科学基金资助项目（2019JJ40068）

作者简介：张启明（1974-），女，湖南涟源人，湖南工业大学教授，博士，硕士生导师，主要从事微分方程及动力系统方面的教学与研究，E-mail：kimberly626@126.com

稳定性理论。M. Bohner 和 A. Peterson 在文献 [6-7] 中，系统分析了时标上一类非常重要的动力方程：时标上的动力方程。时标上的动力方程（系统）不仅可以包括连续和离散这两种特殊的情形，而且在应用上也蕴含巨大的潜力，是一个比较新的有着广泛应用前景的应用数学分支，其理论研究主要集中在边值问题、振动性、稳定性、不共扼性等方面 [8-12]。本文将在预备知识部分对时标的基本概念和基本理论作简要介绍。

关于时标上的动力方程（系统）的 Lyapunov 型不等式，文献 [11-19] 中分别对时标上的 Hill 型方程、Hamilton 系统、一阶非线性系统以及拟线性系统进行了研究，得到了许多重要的结果。其中文献 [11-12] 是通过建立 Lyapunov 型不等式来讨论其稳定性的。

本文考虑下述拟线性时标动力方程

$$\begin{cases} -\left(r_1(t)\left|u^{\Delta}(t)\right|^{p-2}u^{\Delta}(t)\right)^{\Delta}= \\ \quad f_1(t)\left|u(\sigma(t))\right|^{\alpha_1-2}\left|v(\sigma(t))\right|^{\beta_1}u(\sigma(t)), \\ -\left(r_2(t)\left|v^{\Delta}(t)\right|^{q-2}v^{\Delta}(t)\right)^{\Delta}= \\ \quad f_2(t)\left|u(\sigma(t))\right|^{\alpha_2}\left|v(\sigma(t))\right|^{\beta_2-2}v(\sigma(t))。\end{cases} \tag{4}$$

并建立一些新的 Lyapunov 型不等式。

特别地，当 $\beta_1=\alpha_2=0$，$\alpha_1=p=\beta_2=q=\gamma$，$r_1(t)=r_2(t)=r(t)$，$f_1(t)=f_2(t)=Q(t)$ 时，方程（4）退化为二阶半线性时标动力方程

$$\left(r(t)\left|u^{\Delta}(t)\right|^{\gamma-2}u^{\Delta}(t)\right)^{\Delta}+Q(t)\left|u(\sigma(t))\right|^{\gamma-2}u(\sigma(t))=0, \tag{5}$$

式中：$\gamma>1$，$r(t)>0$。

2 预备知识

时标是指实数集 $\mathbf{R}$ 上任意的非空闭子集，通常记作 T。

定义 1[7] 设 T 为时标，对任意 $t\in T$，当 $\sigma(t):=\inf\{s\in T:s>t\}$ 时，称 $\sigma:T\to T$ 为前跳跃算子；当 $\rho(t):=\sup\{s\in T:s<t\}$ 时，称 $\rho:T\to T$ 为后跳跃算子。

定义 1 中，假设 $\inf\phi=\sup T$（即如果 T 有一最大值 M，则有 $\sigma(M)=M$），而 $\sup\phi=\inf T$（即如果 T 有一最小值 m，则有 $\rho(m)=m$）其中 ϕ 表示空集。若 $\sigma(t)>t$，称 t 是右发散的；若 $\rho(t)<t$，称 t 是左发散的。若 $t<\sup T$ 且 $\sigma(t)=t$，则称 t 是右稠密的；而当 $t>\inf T$ 且 $\rho(t)=t$ 时，则称 t 是左稠密的。既右发散又左发散的点称为孤立点；既右稠密又左稠密的点称为稠密点。如果 T 的左发散点有最大值 M，则 $T^k=T-\{M\}$（k 为正整数）；否则，$T^k=T$。定义如下 graininess（粟谷）函数 $\mu:T\to[0,\infty)$，

$$\mu(t):=\sigma(t)-t，对任意\ t\in T。$$

对函数 $f:T\to\mathbf{R}$，下面给出函数 f 在点 $t\in T^k$ 时的 Δ（或 Hilger）导数的定义。

定义 2[7] 设 $t\in T^k$，函数 $f:T\to\mathbf{R}$，若对任意 $\varepsilon>0$，存在 t 的邻域 U，使得对任意 $s\in U$ 都有

$$\left|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)\right|\leqslant\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|,$$

则称 $f^{\Delta}(t)$ 为 f 在 t 的 Δ（或 Hilger）导数。

引理 2[7] 设函数 $f, g:T\to\mathbf{R}$ 在 $t\in T^k$ 都可微，则：

i）对任意常数 a, b，$af+bg:T\to\mathbf{R}$ 在 t 也可微，且 $(af+bg)^{\Delta}(t)=af^{\Delta}(t)+bg^{\Delta}(t)$；

ii）若 $f^{\Delta}(t)$ 存在，则 f 在 t 连续；

iii）若 $f^{\Delta}(t)$ 存在，则 $f(\sigma(t))=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t)$；

iv）$fg:T\to\mathbf{R}$ 在 t 可微，且

$$(fg)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)g(t)+f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)= \\ f(t)g^{\Delta}(t)+f^{\Delta}(t)g(\sigma(t));$$

v）若 $g(t)g(\sigma(t))\neq 0$，则 f/g 在 t 可微，且

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=\frac{f^{\Delta}(t)g(t)-f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}。$$

定义 3[7] 函数 $f:T\to\mathbf{R}$ 称为 rd 连续的，若它在 T 中的右稠密点连续，在 T 中的左稠密点的左极限存在且有限，记作 $C_{rd}=C_{rd}(T)=C_{rd}(T,\mathbf{R})$。

定义 4[7] 对任意 $t\in T^k$，若 $F^{\Delta}(t)=f(t)$，则称函数 $F:T\to\mathbf{R}$ 为 $f:T\to\mathbf{R}$ 的原函数，并记 Cauchy 积分为

$$\int_{\tau}^{s}f(\tau)\Delta t=F(s)-F(\tau),\ \forall s,\tau\in T。$$

引理 3[7] 若 $a, b, c\in T$，$k\in\mathbf{R}$，且 $f, g\in C_{rd}$，则：

i）$\int_a^b[f(t)+g(t)]\Delta t=\int_a^b f(t)\Delta t+\int_a^b g(t)\Delta t$；

ii）$\int_a^b(kf)(t)\Delta t=k\int_a^b f(t)\Delta t$；

iii）$\int_a^b f(t)\Delta t=\int_a^c f(t)\Delta t+\int_c^b f(t)\Delta t$；

iv）$\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t=(fg)(b)-(fg)(a)-\int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t$；

v）$\int_t^{\sigma(t)}f(s)\Delta s=\mu(t)f(t)$，对 $t\in T^k$；

vi）对 $t\in[a,b)$，若 $|f(t)|\leqslant g(t)$，则

$$\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right|\leqslant\int_a^b g(t)\Delta t。$$

引理 4[7]（Cauchy-Schwarz 不等式） 设 $a, b\in T$，$1<p$，$q<+\infty$，且满足 $1/p+1/q=1$，则对函数 f, $g\in C_{rd}$，有不等式

$$\int_a^b\left|f(t)g(t)\right|\Delta t\leqslant\left\{\int_a^b f^p(t)\Delta t\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_a^b g^q(t)\Delta t\right\}^{\frac{1}{q}}成立。$$

3 主要结果及证明

为方便，记 $f_i^+(t)=\max\{f_i(t),0\}$，$i=1, 2$。

首先，给出如下假设：

H1　对任意 $t\in T$，$r_1(t), r_2(t), f_1(t), f_2(t)\in C_{\mathrm{rd}}$，并且 $r_1(t)>0$，$r_2(t)>0$。

H2　对 $i=1, 2$，系数 p, q, α_i, β_i 满足 $\alpha_i/p+\beta_i/q=1$，且 $1<p, q<+\infty$，$\alpha_i>0, \beta_i>0$，并记

$$\begin{cases}\varsigma_1(t):=\left(\int_a^{\sigma(t)}\left[r_1(\tau)\right]^{1/(1-p)}\Delta\tau\right)^{p-1},\\ \eta_1(t):=\left(\int_{\sigma(t)}^{b}\left[r_1(\tau)\right]^{1/(1-p)}\Delta\tau\right)^{p-1};\end{cases}\tag{6}$$

$$\begin{cases}\varsigma_2(t):=\left(\int_a^{\sigma(t)}\left[r_2(\tau)\right]^{1/(1-q)}\Delta\tau\right)^{q-1},\\ \eta_2(t):=\left(\int_{\sigma(t)}^{b}\left[r_2(\tau)\right]^{1/(1-q)}\Delta\tau\right)^{q-1}。\end{cases}\tag{7}$$

定理 1　设 $a, b\in T^k, \sigma(a)\leqslant b$，且假设 H1 和 H2 成立，如果方程（4）的非平凡解 $(u(t), v(t))$ 满足边值条件

$$u(a)=u(b)=0=v(a)=v(b),\tag{8}$$

其中 $u(t)$ 不恒等于 0，对任意 $t\in[a, b]$，则

$$\left(\int_a^b\frac{\varsigma_1(t)\eta_1(t)}{\varsigma_1+\eta_1}f_1^+(t)\Delta t\right)^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{p^2}}\cdot\left(\int_a^b\frac{\varsigma_1(t)\eta_1(t)}{\varsigma_1+\eta_1}f_2^+(t)\Delta t\right)^{\frac{\alpha_2\beta_1}{pq}}\cdot$$
$$\left(\int_a^b\frac{\varsigma_2(t)\eta_2(t)}{\varsigma_2+\eta_2}f_1^+(t)\Delta t\right)^{\frac{\alpha_2\beta_1}{pq}}\cdot\left(\int_a^b\frac{\varsigma_2(t)\eta_2(t)}{\varsigma_2+\eta_2}f_2^+(t)\Delta t\right)^{\frac{\beta_1\beta_2}{q^2}}\geqslant 1。\tag{9}$$

证明　利用时标积分和边值条件（8），可将方程（4）化为式（10）和式（11）：

$$\int_a^b r_1(t)\left|u^\Delta(t)\right|^p\Delta t=\int_a^b f_1(t)\left|u(\sigma(t))\right|^{\alpha_1}\left|v(\sigma(t))\right|^{\beta_1}\Delta t,\tag{10}$$

$$\int_a^b r_2(t)\left|v^\Delta(t)\right|^q\Delta t=\int_a^b f_2(t)\left|u(\sigma(t))\right|^{\alpha_2}\left|v(\sigma(t))\right|^{\beta_2}\Delta t。\tag{11}$$

由式（6）（8）以及 Cauchy 积分的定义和引理 4，可得式（12）和式（13）：

$$\left|u(\sigma(t))\right|^p=\left|\int_a^{\sigma(t)}u^\Delta(t)\Delta\tau\right|^p\leqslant\left(\int_a^{\sigma(t)}\left[r_1(\tau)\right]^{1/(1-p)}\Delta\tau\right)^{p-1}\cdot$$
$$\int_a^{\sigma(t)}r_1(\tau)\left|u(\tau)\right|^p\Delta\tau=\varsigma_1(t)\int_a^{\sigma(t)}r_1(\tau)\left|u^\Delta(\tau)\right|^p\Delta\tau,\ a\leqslant t\leqslant b,\tag{12}$$

$$\left|u(\sigma(t))\right|^p=\left|\int_{\sigma(t)}^b u^\Delta(\tau)\Delta\tau\right|^p\leqslant\left(\int_{\sigma(t)}^b\left[r_1(\tau)\right]^{1/(1-p)}\Delta\tau\right)^{p-1}\cdot$$
$$\int_{\sigma(t)}^b r_1(\tau)\left|u(\tau)\right|^p\Delta\tau=\eta_1(t)\int_{\sigma(t)}^b r_1(\tau)\left|u^\Delta(\tau)\right|^p\Delta\tau,\ a\leqslant t\leqslant b。\tag{13}$$

由式（12）和式（13），可得

$$\left|u(\sigma(t))\right|^p\leqslant\frac{\varsigma_1(t)\eta_1(t)}{\varsigma_1(t)+\eta_1(t)}\int_a^b r_1(\tau)\left|u^\Delta(\tau)\right|^p\Delta\tau,\ a\leqslant t\leqslant b。\tag{14}$$

从而，由式（8）（10）（11）（14）以及假设 H2 和引理 4，可得

$$\begin{aligned}&\int_a^b f_1^+(t)\left|u(\sigma(t))\right|^p\Delta t\leqslant\\&\int_a^b\frac{\varsigma_1(t)\eta_1(t)}{\varsigma_1(t)+\eta_1(t)}f_1^+(t)\Delta t\int_a^b r_1(t)\left|u^\Delta(t)\right|^p\Delta t=\\&M_{11}\int_a^b f_1(t)\left|u(\sigma(t))\right|^{\alpha_1}\left|v(\sigma(t))\right|^{\beta_1}\Delta t\leqslant\\&M_{11}\int_a^b f_1^+(t)\left|u(\sigma(t))\right|^{\alpha_1}\left|v(\sigma(t))\right|^{\beta_1}\Delta t\leqslant\\&M_{11}\left(\int_a^b f_1^+(t)\left|u(\sigma(t))\right|^p\Delta t\right)^{\alpha_1/p}\cdot\\&\left(\int_a^b f_1^+(t)\left|v(\sigma(t))\right|^q\Delta t\right)^{\beta_1/q},\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}&\int_a^b f_2^+(t)\left|u(\sigma(t))\right|^p\Delta t\leqslant\\&\int_a^b\frac{\varsigma_1(t)\eta_1(t)}{\varsigma_1(t)+\eta_1(t)}f_2^+(t)\Delta t\int_a^b r_1(t)\left|u^\Delta(t)\right|^p\Delta t=\\&M_{12}\int_a^b f_1(t)\left|u(\sigma(t))\right|^{\alpha_1}\left|v(\sigma(t))\right|^{\beta_1}\Delta t\leqslant\\&M_{12}\int_a^b f_1^+(t)\left|u(\sigma(t))\right|^{\alpha_1}\left|v(\sigma(t))\right|^{\beta_1}\Delta t\leqslant\\&M_{12}\left(\int_a^b f_1^+(t)\left|u(\sigma(t))\right|^p\Delta t\right)^{\alpha_1/p}\cdot\\&\left(\int_a^b f_1^+(t)\left|v(\sigma(t))\right|^q\Delta t\right)^{\beta_1/q},\end{aligned}\tag{16}$$

其中

$$\begin{cases}M_{11}=\int_a^b\frac{\varsigma_1(t)\eta_1(t)}{\varsigma_1(t)+\eta_1(t)}f_1^+(t)\Delta t,\\ M_{12}=\int_a^b\frac{\varsigma_1(t)\eta_1(t)}{\varsigma_1(t)+\eta_1(t)}f_2^+(t)\Delta t。\end{cases}\tag{17}$$

类似地，由式（7）（8）和引理 4，有

$$\left|v(\sigma(t))\right|^q\leqslant\frac{\varsigma_2(t)\eta_2(t)}{\varsigma_2(t)+\eta_2(t)}\int_a^b r_2(\tau)\left|v^\Delta(\tau)\right|^q\Delta\tau,\ a\leqslant t\leqslant b。\tag{18}$$

从而，由式（8）（10）（11）（18）以及假设 H2 和引理 4，可得

$$\begin{aligned}&\int_a^b f_1^+\left|v(\sigma(t))\right|^q\Delta t\leqslant\\&\int_a^b\frac{\varsigma_2(t)\eta_2(t)}{\varsigma_2(t)+\eta_2(t)}f_1^+(t)\Delta t\int_a^b r_2(\tau)\left|v^\Delta(\tau)\right|^q\Delta\tau=\\&M_{21}\int_a^b f_2(t)\left|u(\sigma(t))\right|^{\alpha_2}\left|v(\sigma(t))\right|^{\beta_2}\Delta t\leqslant\\&M_{21}\int_a^b f_2^+(t)\left|u(\sigma(t))\right|^{\alpha_2}\left|v(\sigma(t))\right|^{\beta_2}\Delta t\leqslant\\&M_{21}\left(\int_a^b f_2^+(t)\left|u(\sigma(t))\right|^p\Delta t\right)^{\alpha_2/p}\cdot\\&\left(\int_a^b f_2^+(t)\left|v(\sigma(t))\right|^q\Delta t\right)^{\beta_2/q},\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}&\int_a^b f_2^+\left|v(\sigma(t))\right|^q\Delta t\leqslant\\&\int_a^b\frac{\varsigma_2(t)\eta_2(t)}{\varsigma_2(t)+\eta_2(t)}f_2^+(t)\Delta t\int_a^b r_2(\tau)\left|v^\Delta(\tau)\right|^q\Delta\tau=\end{aligned}$$

$$M_{21}\int_a^b f_2(t)\left|u(\sigma(t))\right|^{\alpha_2}\left|v(\sigma(t))\right|^{\beta_2}\Delta t\leqslant$$
$$M_{21}\int_a^b f_2^+(t)\left|u(\sigma(t))\right|^{\alpha_2}\left|v(\sigma(t))\right|^{\beta_2}\Delta t\leqslant$$
$$M_{21}\left(\int_a^b f_2^+(t)\left|u(\sigma(t))\right|^p\Delta t\right)^{\alpha_2/p}\cdot$$
$$\left(\int_a^b f_2^+(t)\left|v(\sigma(t))\right|^q\Delta t\right)^{\beta_2/q}, \tag{20}$$

其中

$$\begin{cases} M_{21}=\int_a^b \dfrac{\varsigma_2(t)\eta_2(t)}{\varsigma_2(t)+\eta_2(t)}f_1^+(t)\Delta t, \\ M_{22}=\int_a^b \dfrac{\varsigma_2(t)\eta_2(t)}{\varsigma_2(t)+\eta_2(t)}f_2^+(t)\Delta t。\end{cases} \tag{21}$$

下证

$$\int_a^b f_1^+(t)\left|u(\sigma(t))\right|^p\Delta t>0。 \tag{22}$$

事实上，若命题（22）非真，则有

$$\int_a^b f_1^+(t)\left|u(\sigma(t))\right|^p\Delta t=0, \tag{23}$$

从而由假设H2以及式（10）（23）可得

$$0\leqslant\int_a^b r_1(t)\left|u^\Delta(t)\right|^p\Delta t=$$
$$\int_a^b f_1(t)\left|u(\sigma(t))\right|^{\alpha_1}\left|v(\sigma(t))\right|^{\beta_1}\Delta t\leqslant$$
$$\int_a^b f_1^+(t)\left|u(\sigma(t))\right|^{\alpha_1}\left|v(\sigma(t))\right|^{\beta_1}\Delta t\leqslant$$
$$\left\{\int_a^b\left[\left(f_1^+(t)\right)^{\alpha_1/p}\left|u(\sigma(t))\right|^{\alpha_1}\right]^{p/\alpha_1}\Delta t\right\}^{\alpha_1/p}\cdot$$
$$\left\{\int_a^b\left[\left(f_1^+(t)\right)^{\beta_1/q}\left|v(\sigma(t))\right|^{\beta_1}\right]^{q/\beta_1}\Delta t\right\}^{\beta_1/q}=$$
$$\left\{\int_a^b f_1^+(t)\left|u(\sigma(t))\right|^p\Delta t\right\}^{\alpha_1/q}\cdot$$
$$\left\{\int_a^b f_1^+(t)\left|v(\sigma(t))\right|^q\Delta t\right\}^{\beta_1/q}=0。 \tag{24}$$

根据式（24）和假设H1有

$$u^\Delta(t)\equiv 0,\ a\leqslant t\leqslant b, \tag{25}$$

从而对一切 $a\leqslant t\leqslant b$，由式（12）（25）可得 $u(t)\equiv 0$。这与边值条件（8）矛盾，所以不等式（22）成立。

类似地可证下述不等式

$$\begin{cases} \int_a^b f_2^+(t)\left|u(\sigma(t))\right|^p\Delta t>0, \\ \int_a^b f_1^+(t)\left|v(\sigma(t))\right|^q\Delta t>0, \\ \int_a^b f_2^+(t)\left|v(\sigma(t))\right|^q\Delta t>0 \end{cases} \tag{26}$$

成立。进而由式（15）（16）（19）（20）（22）（26）以及假设H2可得

$$M_{11}{}^{\alpha_1\alpha_2/p^2}M_{12}{}^{\alpha_2\beta_1/pq}M_{21}{}^{\alpha_2\beta_1/pq}M_{22}{}^{\beta_1\beta_2/q^2}\geqslant 1。 \tag{27}$$

再结合式（17）（21）即可得结论（9）成立。

推论1 设 $a, b\in T^k$，$\sigma(a)\leqslant b$，且假设H1和H2成立，如果方程（4）的非平凡解 $(u(t), v(t))$ 满足边值条件（8），则

$$\left(\int_a^b f_1^+(t)\left[\varsigma_1(t)\eta_1(t)\right]^{1/2}\Delta t\right)^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{p^2}}\cdot$$
$$\left(\int_a^b f_2^+(t)\left[\varsigma_1(t)\eta_1(t)\right]^{1/2}\Delta t\right)^{\frac{\alpha_2\beta_1}{pq}}\cdot$$
$$\left(\int_a^b f_1^+(t)\left[\varsigma_2(t)\eta_2(t)\right]^{1/2}\Delta t\right)^{\frac{\alpha_2\beta_1}{pq}}\cdot$$
$$\left(\int_a^b f_2^+(t)\left[\varsigma_2(t)\eta_2(t)\right]^{1/2}\Delta t\right)^{\frac{\beta_1\beta_2}{q^2}}\geqslant$$
$$2^{(q\alpha_2+p\beta_1)/pq}。 \tag{28}$$

证明 由 $\varsigma_i(t)+\eta_i(t)\geqslant 2\left[\varsigma_i(t)\eta_i(t)\right]^{1/2}$ $(i=1, 2)$、式（9）及假设H2可直接证得式（28）成立。

推论2 设 $a, b\in T^k$，$\sigma(a)\leqslant b$，且假设H1和H2成立，如果方程（4）的非平凡解 $(u(t), v(t))$ 满足边值条件（8），则

$$\left(\int_a^b\left[r_1(t)\right]^{1/(1-p)}\Delta t\right)^{\frac{\alpha_2(p-1)}{p}}\left(\int_a^b\left[r_2(t)\right]^{1/(1-q)}\Delta t\right)^{\frac{\beta_1(q-1)}{q}}\cdot$$
$$\left(\int_a^b f_1^+(t)\Delta t\right)^{\frac{\alpha_2}{p}}\left(\int_a^b f_2^+(t)\Delta t\right)^{\frac{\beta_1}{q}}\geqslant 2^{\alpha_2+\beta_1}。 \tag{29}$$

证明 由

$$\left[\varsigma_1(t)\eta_1(t)\right]^{1/2}=$$
$$\left(\int_a^{\sigma(t)}\left[r_1(\tau)\right]^{1/(1-p)}\Delta\tau\int_{\sigma(t)}^b\left[r_1(\tau)\right]^{1/(1-p)}\Delta\tau\right)^{\frac{p-1}{2}}\leqslant$$
$$\frac{1}{2^{p-1}}\left(\int_a^b\left[r_1(\tau)\right]^{1/(1-p)}\Delta\tau\right)^{p-1},$$
$$\left[\varsigma_2(t)\eta_2(t)\right]^{1/2}=$$
$$\left(\int_a^{\sigma(t)}\left[r_2(\tau)\right]^{1/(1-q)}\Delta\tau\int_{\sigma(t)}^b\left[r_2(\tau)\right]^{1/(1-q)}\Delta\tau\right)^{\frac{q-1}{2}}\leqslant$$
$$\frac{1}{2^{q-1}}\left(\int_a^b\left[r_2(\tau)\right]^{1/(1-q)}\Delta\tau\right)^{q-1},$$

以及式（28）和假设H2可直接证得式（29）成立。

对二阶半线性动力方程（5），由式（14）或（18）易得下述定理2。

定理2 设 $a, b\in T^k$，$\sigma(a)\leqslant b$，如果方程（5）有一个非平凡解 $u(t)$ 满足边值条件

$$u(a)=u(b)=0, \tag{30}$$

其中 $u(t)$ 不恒等于零，对任意 $t\in[a, b]$，则

$$\int_a^b \frac{\left(\int_a^{\sigma(t)}\left[r(\tau)\right]^{1/(1-\gamma)}\Delta\tau\right)^{\gamma-1}\left(\int_{\sigma(t)}^b\left[r(\tau)\right]^{1/(1-\gamma)}\Delta\tau\right)^{\gamma-1}}{\left(\int_a^{\sigma(t)}\left[r(\tau)\right]^{1/(1-\gamma)}\Delta\tau\right)^{\gamma-1}+\left(\int_{\sigma(t)}^b\left[r(\tau)\right]^{1/(1-\gamma)}\Delta\tau\right)^{\gamma-1}}\cdot$$
$$Q^+(t)\Delta t\geqslant 1。 \tag{31}$$

由于

$$\left(\int_a^{\sigma(t)}\left[r(\tau)\right]^{1/(1-\gamma)}\Delta\tau\right)^{\gamma-1}+\left(\int_{\sigma(t)}^b\left[r(\tau)\right]^{1/(1-\gamma)}\Delta\tau\right)^{\gamma-1}\geqslant$$

$$2\left(\int_a^{\sigma(t)}\left[r(\tau)\right]^{1/(1-\gamma)}\Delta\tau\right)^{\gamma-1}\left(\int_{\sigma(t)}^b\left[r(\tau)\right]^{1/(1-\gamma)}\Delta\tau\right)^{\gamma-1},$$

由定理 2 可直接得下述推论 3。

推论 3　设 $a, b\in T^k$，$\sigma(a)\leqslant b$，如果方程（5）有一个非平凡解 $u(t)$ 满足边值条件（30），则

$$\int_a^b Q^+(t)\left(\int_a^{\sigma(t)}\left[r(\tau)\right]^{1/(1-\gamma)}\Delta\tau\int_{\sigma(t)}^b\left[r(\tau)\right]^{1/(1-\gamma)}\Delta\tau\right)^{(\gamma-1)/2}\Delta t\geqslant 2。$$

4　结语

本文在边值条件（8）下，建立了拟线性时标动力方程（4）的 Lyapunov 型不等式；进而探讨了作为时标动力方程（4）的特殊情形的二阶半线性时标动力方程（5），在边值条件（30）下的 Lyapunov 型不等式。所得结果可为进一步研究时标动力方程解的特性提供参考。

参考文献：

[1] LYAPUNOV A. Problème Général de La Stabilité Du Mouvement[J]. Annales De La Faculté Des Sciences De Toulouse Mathématiques，1907，9(2)：203–474.

[2] HILGER S. Einßmakettenkalkül Mit Anwendung Auf Zentrumsmannigfaltigkeiten[D]. Thesis：Universität Würzburg，1988.

[3] HILGER S. Analysis on Measure Chains：A Unified Approach to Continuous and Discrete Calculus[J]. Results in Mathematics，1990，18(1/2)：18–56.

[4] HILGER S. Differential and Difference Calculus：Unified![J]. Nonlinear Analysis：Theory, Methods & Applications，1997，30(5)：2683–2694.

[5] KAYMAKCALAN B，LAKSHIMIKANTHAM V，SIVASUNDARAM S. Dynamic System on Measure Chains[M]. Dordrecht：Kluwer Academic Publishers，1996：102–115.

[6] BOHNER M，PETERSON A. Dynamic Equations on Time：An Introduction with Applications[M]. Boston：Birkhäuser Boston，2001：271–278.

[7] BOHNER M，PETERSON A. Advances in Dynamic Equations on Time Scales[M]. Boston：Birkhäuser Boston，2003：17–46.

[8] HE Z M. Existence of Two Solutions of *m*-Point Boundary Value Problem for Second Order Dynamic Equations on Time Scales[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2004，296(1)：97–109.

[9] SAKER S H. Oscillation of Nonlinear Dynamic Equations on Time Scales[J]. Applied Mathematics and Computation，2004，148(1)：81–91.

[10] 欧柳曼，朱思铭 . 时标动力方程的稳定性分析 [J]. 数学物理学报，2008，28(2)：308–319.
OU Liuman，ZHU Siming. Stable Analysis for Dynamic Equations on Time Scales[J]. Acta Mathematica Scientia，2008，28(2)：308–319.

[11] MERDIVENCI ATICI F，GUSEINOV G S H，KAYMAK B. On Lyapunov Inequality in Stability Theory for Hill's Equation on Time Scales[J]. Journal of Inequalities and Applications，2000，5：603–620.

[12] HE X F，TANG X H，ZHANG Q M. Stability Criteria for Linear Hamiltonian Dynamic Systems on Time Scales[J]. Advances in Difference Equations，2011，doi:10.1186/1687-1847-2011-63.

[13] JIANG L Q，ZHOU Z. Lyapunov Inequality for Linear Hamiltonian Systems on Time Scales[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2005，310(2)：579–593.

[14] TIRYAKI A，ÜNALB M，ÇAKMAK D. Lyapunov-Type Inequalities for Nonlinear Systems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2007，332(1)：497–511.

[15] 孙太祥，彭小凤，余卫勇 . 时标上二阶动力方程的 Lyapunov 不等式 [J]. 广西科学，2010，17(3)：185–187.
SUN Taixiang，PENG Xiaofeng，YU Weiyong. Lyapunov Inequalities for Second Order Dynamic Equations on Time Scales[J]. Guangxi Sciences，2010，17(3)：185–187.

[16] HE X F，ZHANG Q M，TANG X H. On Inequalities of Lyapunov for Linear Hamiltonian Systems on Time Scales[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2011，381(2)：695–705.

[17] ZHANG Q M，HE X F，JIANG J C. On Lyapunov-Type Inequalities for Nonlinear Dynamic Systems on Time Scales[J]. Computers & Mathematics with Applications，2011，62(11)：4028–4038.

[18] HE X F，ZHANG Q M. Lyapunov-Type Inequalities for Some Quasilinear Dynamic System Involving the(p_1, p_2, ⋯, p_m)-Laplacian on Time Scales[J]. Journal of Applied Mathematics，2011：418136, 10.

[19] SUN T X，XI H J. Lyapunov-Type Inequality for a Higher Order Dynamic Equation on Time Scales[J]. Springer Plus，2016，5：1469.

（责任编辑：邓光辉）