

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2020.02.003

极大 Smith 符号图的 Smith 群和临界群

王倩南, 陈 语

(湖南师范大学 数学系, 湖南 长沙 410081)

摘 要: 针对 Smith 符号图子图 T_{2n} 临界群和 Smith 群的代数结构不易求解的问题, 通过矩阵初等变换得到了符号图 T_{2n} 的 Smith 群和临界群, 然后使用初等因子的方法, 得到了 Smith 群和临界群的代数结构。

关键词: Smith 符号图; 邻接矩阵; Smith 群; Laplacian 矩阵; 临界群

中图分类号: O157.6

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2020)02-0010-05

引文格式: 王倩南, 陈 语. 极大 Smith 符号图的 Smith 群和临界群 [J]. 湖南工业大学学报, 2020, 34(2): 10-14.

Smith Group and Critical Group of Maximal Smith Signed Graphs

WANG Qiannan, CHEN Yu

(Department of Mathematics, Hunan Normal University, Changsha 410081, China)

Abstract: In view of the difficulty in finding the algebraic structure of the subgraph T_{2n} of Smith signed graph and Smith group, a proposal has thus been made that the Smith group and critical group of Smith signed graph T_{2n} be obtained first by matrix elementary transformation, followed by the obtaining of the algebraic structure of Smith group and Smith group by using the method of elementary factors.

Keywords: Smith signed graph; adjacency matrix; Smith group; Laplacian matrix; critical group

1 研究背景

随着临界群在物理、经济等不同领域的广泛应用, 近些年来, 越来越多的学者开始对连通图的临界群和 Smith 群进行研究, 并发现临界群和 Smith 群是连通图的精细不变量。目前, 对于连通图的临界群和 Smith 群已有较多研究成果, 比如莫比乌斯阶梯图 $M_n^{[1]}$ 、Peisert 图 $^{[2]}$ 、迭代锥 $^{[3]}$ 、Kneser 图 $^{[4]}$ 、门槛图 $^{[5]}$ 、

Dihedral 图 $^{[6]}$ 、圈的平方 $^{[7]}$ 、 $P_4 \times C_n^{[8]}$ 和 $K_3 \times C_n^{[9]}$ 等多种类型图的临界群。除此之外, 对于临界群上的代数性质也有相关研究, 比如临界群的秩 $^{[10]}$ 。

一个图 G 的点集和边集分别由 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示, 一个符号图 $\Gamma=(G, \sigma)$ 由一个无符号图 $G=(V, E)$ 和一个符号函数 $\sigma:E(G) \rightarrow \{+1, -1\}$ 组成, 如果 $\sigma(e)=+1$, 那么边 e 是正的, 如果 $\sigma(e)=-1$, 那么边 e 是负的。

设连通符号图 Γ 有 n 个顶点, 那么图 Γ 的邻接

收稿日期: 2020-01-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (119710164), 湖南省自然科学基金资助项目 (2019JJ40184), 湖南省研究生创新基金资助项目 (CX2018B287)

作者简介: 王倩南 (1994-), 女, 山西晋城人, 湖南师范大学硕士生, 主要研究方向为图论及其应用,

E-mail: 297964290@qq.com

通信作者: 陈 语 (1993-), 女, 重庆人, 湖南师范大学博士生, 主要研究方向为图论及其应用,

E-mail: 1457181656@qq.com

矩阵是 $n \times n$ 阶的对称矩阵 $A(\Gamma)$, 其中 $a_{ii}=0, i \in \{1, 2, \dots, n\}$; $a_{ij}=+1, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 当且仅当顶点 v_i 和顶点 v_j 之间连正边; $a_{ij}=-1, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 当且仅当顶点 v_i 和顶点 v_j 之间连负边。连通符号图 Γ 的 Laplacian 矩阵定义如下: $L(\Gamma)=D(\Gamma)-A(\Gamma)$, 其中 $D(\Gamma)=\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 是连通符号图 Γ 的度矩阵。

将连通符号图 Γ 的邻接矩阵 $A(\Gamma)$ 看作 $\mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{Z}^n$ 的群同态, 余核 $\text{coker } A(\Gamma)=\mathbf{Z}^n/(A(\Gamma)\mathbf{Z}^n)$ 称为 Γ 的 Smith 群。类似地, 将连通符号图 Γ 的 Laplacian 矩阵 $L(\Gamma)$ 看作 $\mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{Z}^n$ 的群同态, 它的余核 $\text{coker } L(\Gamma)=\mathbf{Z}^n/(L(\Gamma)\mathbf{Z}^n)$ 是 Γ 的临界群。

根据连通符号图的 Smith 群和临界群的定义可知, 对其邻接矩阵和 Laplacian 矩阵分别作行列整变换, 可以得到其 Smith 群和临界群的代数结构。除此之外, 课题组还可以通过找 Smith 群和临界群的生成元及其阶数的方法来得到其代数结构。

特征值在 $[-2, 2]$ 的符号图叫做 Smith 符号图^[11], 由 T_{2n} 、 S_{14} 和 S_{16} 的子图构成。在本文中课题组完全确定了极大 Smith 符号图 T_{2n} 的临界群和 Smith 群的代数结构。其中符号图 T_{2n} 、 S_{14} 和 S_{16} 分别与图 1a, 1b 和 1c 所示的符号图转换等价图, 图 1b 和图 1c 中的实线和虚线分别表示两个顶点之间连正边和负边。

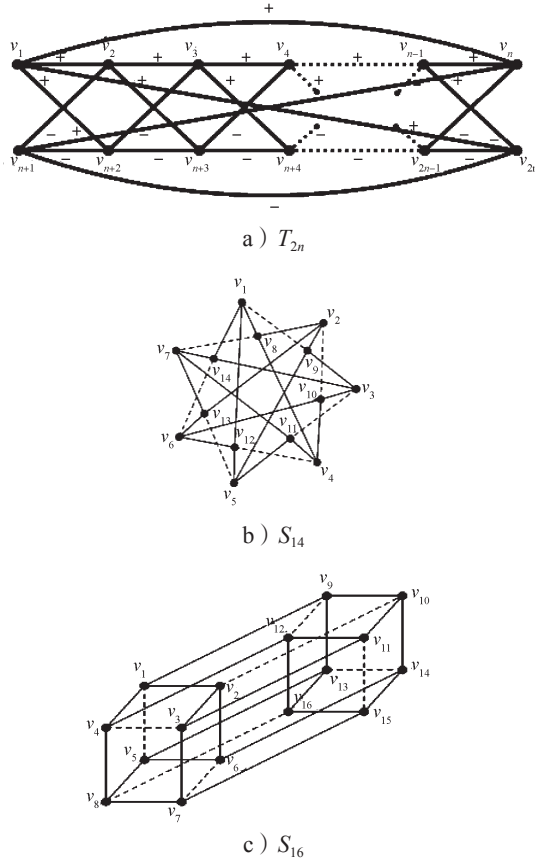


图 1 符号图的转换等价图

Fig. 1 Transformation equivalence graph of signed graph

S_{14} 和 S_{16} 是有限连通符号图, 它们的 Smith 群和临界群较易得到。 S_{14} 的 Smith 群和临界群分别是 $S(S_{14}) \cong \mathbf{Z}_2^2 \oplus \mathbf{Z}_4^6$ 和 $K(S_{14}) \cong \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_6 \oplus \mathbf{Z}_{12}^6$; S_{16} 的 Smith 群和临界群为 $S(S_{16}) \cong \mathbf{Z}_4^8$ 和 $K(S_{16}) \cong \mathbf{Z}_{12}^8$ 。

2 T_{2n} 的 Smith 群和临界群

由图 1 可以写出 T_{2n} 的邻接矩阵 $A(T_{2n}) = \begin{pmatrix} A(C_n) & B \\ -B & -A(C_n) \end{pmatrix}$, 其中 $A(C_n)$ 是圈 C_n 的邻接矩阵,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $A(T_{2n})^2 = 4I$, 所以 T_{2n} 的 Smith 群的初等因子是 4 的素因数的幂, 故可设 $S(T_{2n}) \cong \mathbf{Z}_2^{e_1} \oplus \mathbf{Z}_4^{e_2}$ 。又因为 $2^{e_2} \cdot 4^{e_3} = 2^{e_2+2e_3} = 4^n = 2^{2n}$, 所以有

$$\begin{cases} \text{rank}_2(A(T_{2n})) + e_1 + e_2 = 2n, \\ e_1 + 2e_2 = 2n. \end{cases}$$

其中 $\text{rank}_2(A(T_{2n}))$ 是 $A(T_{2n})$ 在二元域中的秩。

定理 1 $\text{rank}_2(A(C_n)) = \begin{cases} n-1, & n \equiv 1 \pmod{2}; \\ n-2, & n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$

证明 1) 当 $n \equiv 1 \pmod{2}$ 时,

①当 $n \equiv 1 \pmod{4}$ 时, 令

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{则 } P_4 A(C_n) Q_4 = \begin{pmatrix} I_{n-2} & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

综上所述有

$$\text{rank}_2(A(C_n)) = \begin{cases} n-1, & n \equiv 1 \pmod{2}; \\ n-2, & n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

$$\text{定理 2 } \text{rank}_2(A(T_{2n})) = \begin{cases} n-1, & n \equiv 1 \pmod{2}; \\ n-2, & n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

$$\text{证明 令 } P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

$$\text{则 } PA(T_{2n})Q = \begin{pmatrix} A(C_n) & \\ & 0 \end{pmatrix},$$

即

$$\text{rank}_2(A(T_{2n})) = \text{rank}_2(A(C_n)) = \begin{cases} n-1, & n \equiv 1 \pmod{2}; \\ n-2, & n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

定理 3 T_{2n} 的 Smith 群的代数结构为

$$S(T_{2n}) = \begin{cases} Z_2^2 \oplus Z_4^{n-1}, & n \equiv 1 \pmod{2}; \\ Z_2^4 \oplus Z_4^{n-2}, & n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

证明 1) $n \equiv 1 \pmod{2}$ 时, $\text{rank}_2(A(T_{2n})) = n-1$,

$$\text{则 } \begin{cases} e_1 + 2e_2 = 2n, \\ e_1 + e_2 = n+1; \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} e_1 = 2, \\ e_2 = n-1. \end{cases}$$

2) $n \equiv 0 \pmod{2}$ 时, $\text{rank}_2(A(T_{2n})) = n-2$,

$$\text{则 } \begin{cases} e_1 + 2e_2 = 2n, \\ e_1 + e_2 = n+2; \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} e_1 = 4, \\ e_2 = n-2. \end{cases}$$

综上所述, T_{2n} 的 Smith 群的代数结构为

$$S(T_{2n}) = \begin{cases} Z_2^2 \oplus Z_4^{n-1}, & n \equiv 1 \pmod{2}; \\ Z_2^4 \oplus Z_4^{n-2}, & n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

T_{2n} 的 Laplacian 矩阵为

$$L(T_{2n}) = \begin{pmatrix} 4I_n - A(C_n) & -B \\ B & 4I_n + A(C_n) \end{pmatrix}.$$

定理 4 T_{2k} 的临界群的代数结构为

$$S(T_{2k}) = \begin{cases} Z_2 \oplus Z_6 \oplus Z_{12}^{n-1}, & n \equiv 1 \pmod{2}; \\ Z_2^2 \oplus Z_6^2 \oplus Z_{12}^{n-2}, & n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

证明 因为 $A(T_{2n})^2 = 4I$, 所以 $A(T_{2n})$ 的特征值只可能为 ± 2 , 且 $A(T_{2n})$ 的迹为 0, 所以特征值 +2 和 -2 的重数均为 n . 又因为 $L(T_{2n}) = 4I - A(T_{2n})$, 所以 $L(T_{2n})$ 的特征值为 2 和 6, 其重数均为 n , 所以有 $\det L(T_{2n}) = 2^n \times 6^n = 12^n = 4^n \times 3^n$. 由 $A(T_{2n})^2 = 4I$ 可以得知 $(L(T_{2n}) - 8I)L(T_{2n}) = 12I$. 从而 T_{2n} 的临界群的初等因子为 $2, 2^2, 3$, 且可设 $K(T_{2n}) \cong Z_2^{e_1} \oplus Z_4^{e_2} \oplus Z_3^{e_3}$, 其中

$$\begin{cases} e_3 = n, \\ e_1 + 2e_2 = 2n, \\ \text{rank}_2(L(T_{2n})) + e_1 + e_2 = 2n. \end{cases}$$

由定理 2 可知

$$\text{rank}_2(L(T_{2n})) = \begin{cases} n-1, & n \equiv 1 \pmod{2}; \\ n-2, & n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

当 $n \equiv 1 \pmod{2}$ 时, 可得

$$\begin{cases} e_1 = 2, \\ e_2 = n-1. \end{cases}$$

从而有

$$K(T_{2n}) \cong Z_2^2 \oplus Z_4^{n-1} \oplus Z_3^n \cong Z_2^2 \oplus Z_{12}^{n-1} \oplus Z_3 \cong Z_2 \oplus Z_6 \oplus Z_{12}^{n-1}.$$

当 $n \equiv 0 \pmod{2}$ 时, 可得 $\begin{cases} e_1 = 4, \\ e_2 = n-2. \end{cases}$

从而有

$$K(T_{2n}) \cong Z_2^4 \oplus Z_4^{n-2} \oplus Z_3^n \cong Z_2^4 \oplus Z_{12}^{n-2} \oplus Z_3^2 \cong Z_2^2 \oplus Z_6^2 \oplus Z_{12}^{n-2}.$$

3 结语

本文从临界群和 Smith 群的角度, 运用初等变换分别得到了 T_{2n} 的 Smith 群和临界群。如果将 T_{2n} 推广到一般符号图, 则暂时无法用矩阵的初等变换解决。因此, 得到任意一个符号图的临界群和 Smith 群结构是一个十分吸引人和值得深入研究的课题。

参考文献:

- [1] CHEN P G, HOU Y P, WOO C. On the Critical Group of the Möbius Ladder Graph[J]. Australasian Journal of Combinatorics, 2006, 36: 133-142.
- [2] SIN P. The Critical Groups of the Peisert Graphs[J].

- Journal of Algebraic Combinatorics, 2017, 48(2): 227–245.
- [3] GOEL G, PERKINSON D. Critical Groups of Iterated Cones[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2019, 567: 138–142.
- [4] DUCEY J E, HILL I, SIN P. The Critical Group of the Kneser Graph on 2-Subsets of an n -Element Set[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2018, 546: 154–168.
- [5] CHRISTIANSON H, REINER V. The Critical Group of a Threshold Graph[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2002, 349(1/2/3): 233–244.
- [6] DARTOIS A, FIORENZI F, FRANCONI P. Sandpile Group on the Graph of the Dihedral Group[J]. European Journal of Combinatorics, 2003, 24(7): 815–824.
- [7] HOU Y P, CHEN P, WOO C. On the Sandpile Group of the Square Cycle[J]. Algebra and Its Applications, 2006, 418(2/3): 457–467.
- [8] CHEN P, HOU Y P. On the Sandpile Group of $P_4 \times C_n$ [J]. European Journal of Combinatorics, 2008, 29(2): 532–534.
- [9] HOU Y P, LEI T G, WOO C. On the Sandpile Group of the Graph $K_3 \times C_n$ [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2008, 428(8/9): 1886–1898.
- [10] HOU Y P, SHIU W C, CHAN W H. Graphs Whose Critical Groups Have Larger Rank[J]. Acta Mathematica Sinica English, 2011, 27(9): 1663–1670.
- [11] MCKEE J, SMYTH C. Integer Symmetric Matrices Having All Their Eigenvalues in the Interval[J]. Journal of Algebra, 2007, 317(1): 260–290.
- (责任编辑: 申 剑)

.....

(上接第 9 页) 分别如式 (2) (4) (8) (11) 所示, 其中式 (8) 中的上界最精确, 而式 (11) 中的上界计算较简便。

参考文献:

- [1] LORENZINI D J. Arithmetical Graphs[J]. Mathematische Annalen, 1989, 285(3): 481–501.
- [2] CORRALES H, VALENCIA C E. Arithmetical Structures on Graphs[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2018, 536: 120–151.
- [3] BRAUN B, CORRALES H, CORRY S, et al. Counting Arithmetical Structures on Paths and Cycles[J]. Discrete Mathematics, 2018, 341(10): 2949–2963.
- [4] GODSIL C. Algebraic Graph Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 2001: 279–306.
- [5] ROJO O. A Nontrivial Upper Bound on the Largest Laplacian Eigenvalue of Weighted Graphs[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2007, 420(2/3): 625–633.
- [6] DAS K C. An Improved Upper Bound for Laplacian Graph Eigenvalues[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2003, 368: 269–278.
- [7] ROJO O, SOTO R, ROJO H. An Always Nontrivial Upper Bound for Laplacian Graph Eigenvalues[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2000, 312(1/2/3): 155–159.
- [8] BAUER F L, DEUTSCH E, STOER J. Abschätzungen Für Die Eigenwerte Positiver Linearer Operatoren[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1969, 2(3): 275–301.
- (责任编辑: 邓光辉)