

基于分数阶流变本构模型的瓦楞纸箱抗压蠕变行为研究

doi:10.20269/j.cnki.1674-7100.2025.0003

李博文 尹浩民 廖光开
原正昆 李彬 李元康
文雨航 刘跃军

湖南工业大学
包装工程学院
湖南 株洲 412007

摘要: 通过室内试验结合理论分析的方法研究了瓦楞纸箱的抗压蠕变行为。利用纸箱抗压机进行瓦楞纸箱抗压堆码蠕变试验,测量了瓦楞纸箱抗压强度、指定压力下的压溃时间及其蠕变 30 min 后的抗压强度。利用广义分数阶 Kelvin (GFK) 模型对试验数据进行拟合分析,并根据拟合结果进一步分析瓦楞纸箱的蠕变延迟谱 ($L(\tau)$)。研究结果表明,瓦楞纸箱在相同的保压时间下保持压力越大,其变形量也就越大并且会在更短的时间内被压坏。此外,通过蠕变试验数据与理论计算数据的对比,发现 5 单元 Kelvin 体的 GFK 模型能够准确地描述瓦楞纸箱的蠕变行为,从理论上揭示了瓦楞纸箱蠕变过程的结构演化特征。

关键词: 瓦楞纸箱; 抗压蠕变; 广义分数阶 Kelvin 模型

中图分类号: TB485

文献标志码: A

文章编号: 1674-7100(2025)05-0073-09

引文格式: 李博文, 尹浩民, 廖光开, 等. 基于分数阶流变本构模型的瓦楞纸箱抗压蠕变行为研究 [J]. 包装学报, 2025, 17(5): 73-81.

1 研究背景

瓦楞纸箱是一种环保型缓冲包装材料,正逐渐取代泡沫衬垫、木箱和塑料托盘,广泛应用于食品、电子产品、工业产品和农产品的运输和销售中^[1-4]。然而,在潮湿的环境中,瓦楞纸箱会受到湿度的影响,导致其抗压强度降低^[5-7]。长时间的静载也会导致瓦楞纸箱出现塌陷,从而造成产品之间的挤压和损坏^[8]。为了解决上述问题,需要进一步研究瓦楞纸箱的抗压强度、堆码强度及蠕变后的抗压性能等力学特性。

蠕变是流变学研究的一个重要方向,主要关注材料在外力作用下所发生的变形、流动特性以及随时间变化的载荷效应^[9-10]。依据黏弹性理论,瓦楞纸箱的变形不仅与当前的应力状态相关,还与应变的整个变化历程紧密相连,显示出对时间的显著依赖性^[11-12]。这种特性可以通过将基本的力学元件(如 Hooke 弹簧、Newton 黏壶、分数阶弹壶)以串联或并联方式组合成的力学本构模型来阐释。虽然诸如 Maxwell、Kelvin 以及 Zener 等整数阶微积分的经典模型和众多表征手段已被应用于研究材料的变形特性,但它

收稿日期: 2025-04-27

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(2020JJ5136, 2024JJ7134); 湖南省教育厅基金资助项目(21B0535); 国家重点研发计划项目(2023YFC3904603); 湖南省研究生创新基金资助项目(CX20240909)

作者简介: 李博文,男,硕士生,主要研究方向为包装结构设计与包装材料开发, E-mail: bowenli1125@163.com

通信作者: 廖光开,男,副教授,博士,主要从事包装结构设计、新材料研发研究, E-mail: 14158@hut.edu.cn

们在准确反映材料的真实性能和复杂力学行为方面仍表现出一定的局限性。例如,汪泽幸等^[13]分析了Maxwell模型单元数对聚氯乙烯(PVC)涂层弛豫时间谱曲线拟合精度的影响,发现增加Maxwell模型单元数量有助于提高模型的拟合精度,但是面对实际复杂问题,用大量的Maxwell和Kelvin模型单元会引入大量参数,导致计算复杂度高。因此,构建一个新的流变本构模型,以准确描述瓦楞纸箱在蠕变过程中的应力-应变关系,将有助于深入探讨和预测其力学响应。在此基础上,可根据特定的顶部载荷和堆码储存时间,优化瓦楞纸箱设计,从而避免内装物损坏和材料浪费^[14]。

近年来,基于分数阶算子的本构方程越来越受到学者们的关注和研究。分数阶流变本构模型通过定义微分项和积分项,可以用更少的参数准确地描述黏弹性材料在更宽频率或温度范围内的复杂力学行为^[15]。它克服了用整数阶模型处理复杂问题时与实验数据拟合不一致的缺点。Li K. F.等^[16]对聚乙烯醇(PVA)纤维增强水泥基复合材料(PVA-ECC)进行了长期单轴压缩蠕变试验,发现分数阶Maxwell模型比整数阶模型更能准确拟合材料的整体黏弹性行为。徐朝阳等^[17]采用四元件模型对不同楞型的瓦楞纸箱的压缩蠕变特性进行了研究,发现随着应力水平的上升,各种楞型瓦楞纸箱的松弛时间均呈明显下降趋势,且Maxwell模型中的黏滞系数下降较明显。J. Koning等^[18]在研究瓦楞纸箱的长期蠕变特性过程中发现,在蠕变第二阶段,单位高度的蠕变速率和纸箱在静载荷下的寿命呈线性关系,此斜率通过最小二乘法拟合得到,但用短期的蠕变速率预测纸箱的堆码寿命误差较大。以往研究纸箱的蠕变特性,都是直接运用试验数据,并没有考虑其力学特性。因此,本研究拟运用黏弹性理论探讨瓦楞纸箱的蠕变模型,从而将理论分析和室内试验相结合,更好地解释瓦楞纸箱的蠕变行为。选取纸板厚度为6 mm的瓦楞纸箱作为研究对象,利用纸箱抗压机进行纸箱的抗压蠕变试验,进一步研究瓦楞纸箱抗压强度、指定压力下的压溃时间和固定载荷下的蠕变行为。通过引入分数阶弹壶来替代广义Kelvin模型中的Newton黏壶得到广义分数阶Kelvin(GFK)模型,并推导出模型的本构关系。随后,用该模型拟合瓦楞纸箱的蠕变数据,利用短期试验数据预测材料的长期蠕变行为,分析瓦楞纸箱在室温压痕下的延迟谱。

2 试验部分

2.1 试样与试验设备

瓦楞纸箱采用厚度为6 mm的5层AB瓦楞纸板制作,尺寸为360 mm×250 mm×120 mm,由玖龙纸业(控股)有限公司生产。每个纸箱的尺寸和完整性略有不同。纸箱抗压机,C661M型,由济南兰光机电技术有限公司生产。瓦楞纸箱和纸箱抗压机如图1所示。

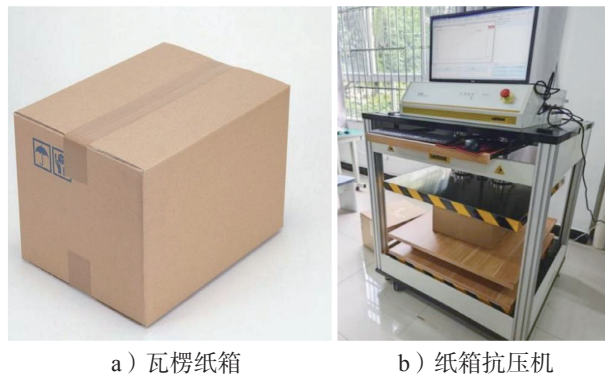


图1 纸箱和设备

Fig. 1 Carton and equipment

2.2 试验方法

根据国家标准 GB/T 4857.4—2008《包装 运输包装件基本试验 第4部分:采用压力试验机进行的抗压和堆码试验方法》进行试验。根据对纸类包装件的预处理条件,试验的标准大气条件为温度 $(23 \pm 1)^\circ\text{C}$ 、相对湿度 $(50 \pm 2)\%$ 。将纸箱放置在纸箱抗压机上进行单个纸箱的最大压溃力试验,压头与纸箱初始距离调整为10 cm,以100 mm/min的速度施加压力直到纸箱压溃,压溃点即为纸箱的最大压溃力,记录最大压溃力值以及相应的载荷值。试验独立重复5次,取平均值,以确保数据的可用性和科学性。

测出最大压溃力后,每4个瓦楞纸箱为一组,分别进行堆码试验和压溃力试验。第一组试验:分别在20%、30%、40%、50%的最大压溃力($F_{\max}$)保载下进行堆码试验,测出瓦楞纸箱保载30 min的抗压蠕变数据。第二组试验:分别在60%、65%、70%、75%的最大压溃力保载下进行压溃力试验,测出瓦楞纸箱直至压溃时的抗压蠕变数据。

2.3 数据处理

设备输出的试验结果为压缩变形量-时间曲线。为了进一步分析瓦楞纸箱的压缩蠕变行为,需将压缩变形量-时间曲线转化为应变-时间曲线,以深入

探讨其变形行为、破坏特征和抗压强度。应变 ε 为

$$\varepsilon = \Delta L / H, \quad (1)$$

式中: ΔL 为压缩变形量, mm; H 为纸箱高度, $H=120$ mm。

3 试验结果与分析

1) 第一组试验

不同压力下瓦楞纸箱保载 30 min 的抗压蠕变曲线如图 2 所示。由图 2 可知, 在相同的保载时间下, 施加的压力越大, 材料的蠕变效应越显著, 瓦楞纸箱的变形量和初始蠕变长度也随之增大。这是因为施加压力后, 瓦楞纸箱经历了一个初始的塑性变形阶段, 材料结构可能发生了不可逆的变形, 导致曲线在开始时迅速上升。除此之外, 此阶段材料内部的应力分布呈现不均匀状态, 较高的压力将引发材料内部更为显著的应力集中现象, 进而导致材料在短时间内产生更为剧烈的变形。尽管瓦楞纸箱在不同压力下的变形量有所差异, 但在相同的保载时间内, 其变形曲线趋于稳定。这表明, 在一定的压力范围内, 瓦楞纸箱的变形特性表现出稳定性。这一特性可用于评估瓦楞纸箱在长期负载条件下的稳定性和耐久性。从图 2 中还可以观察到, 不同压力下保载 30 min 的抗压蠕变曲线均出现初始蠕变和稳态蠕变两个阶段。随着应力的增加, 初始蠕变时间和稳态蠕变速率均未发生显著变化, 且未出现加速蠕变现象。这可能是应力不足或蠕变时间较短导致的。在稳态蠕变阶段, 材料的蠕变行为受到黏弹性的影响, 表现为材料的变形速率趋于稳定, 且蠕变速率相对稳定。因此, 这一

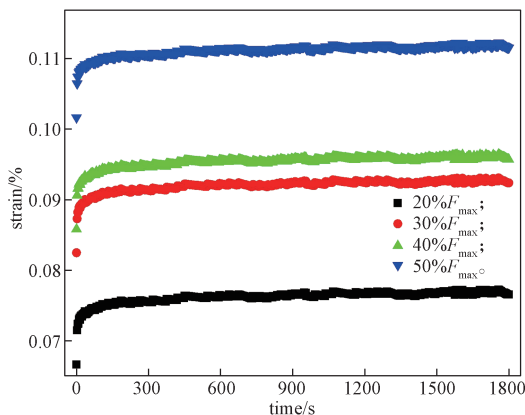


图 2 不同压力下保载 30 min 的蠕变应变数据

Fig. 2 Creep strain data for 30 min under different pressures

特性可进一步用于预测材料在长时间载荷下的表现。本试验未出现加速蠕变阶段, 这意味着在所考虑的压力范围内, 瓦楞纸箱的变形行为是可预测且稳定的, 未达到其失效或塑性变形的极限。较高的压力通常会导致更大的初始应变和更高的稳态应变, 但不一定导致加速蠕变。

2) 第二组试验

在不同保载压力下瓦楞纸箱直至压溃时的抗压蠕变曲线如图 3 所示。从图 3 可以看出, 随着保载压力的增加, 瓦楞纸箱初始蠕变长度的变化趋势与图 2 所示情况相吻合。此外, 保载压力越大, 瓦楞纸箱被压坏的时间越短。这是因为随着保载压力的增加, 材料内部的应力水平也随之增加, 进而加速了材料的塑性变形和内部结构 (如瓦楞的波纹结构) 的压缩过程。材料压溃过程的加速, 导致材料在更短的时间内达到其屈服点或失效点, 使得抗压时间大幅缩短, 最终迅速丧失承载能力。从图 3 中还可以看出, 抗压蠕变曲线表现出典型的 4 个阶段。瓦楞纸箱在相同的保压时间下, 保载压力越大, 变形量也越大, 即加载瞬间的弹性应变越大。当应力持续作用时, 材料进入初始蠕变阶段。此时, 蠕变应变开始快速增加, 主要由材料内部的黏弹性特性和微观结构变化引起。随着时间的推移, 蠕变应变逐渐稳定, 进入稳态蠕变阶段。在此阶段, 蠕变速率随时间延长逐渐减小, 最终趋于常数; 材料的变形速率减缓, 变形机制趋于稳定。稳态蠕变阶段的持续时间一般较长, 其长短主要受应力水平的影响。在接近压溃时, 蠕变速率迅速增加, 进入加速蠕变阶段。这意味着材料的承载能力接近极限, 内部结构因损伤积累而发生重大变化,

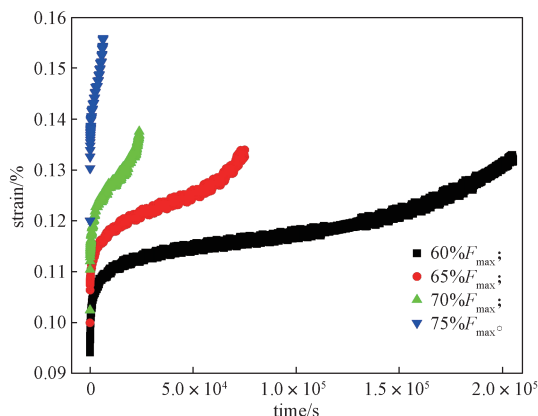


图 3 不同保载压力下直至压溃的蠕变应变数据

Fig. 3 Creep strain data at different pressures up to crushing

或材料在破坏前出现塑性变形, 导致材料蠕变破坏。加速蠕变的出现表明材料即将失效。总的来说, 保载压力越大, 压溃发生的时间越早。通过分析每个阶段的蠕变速率, 可以有效预测和优化材料的抗压性能。

4 理论模型

4.1 广义分数阶 Kelvin 模型

分数黏弹性模型是一种基于分数微积分的黏弹性本构模型。其能够用较少的参数准确描述材料的黏弹性和复杂的力学行为, 因此在材料科学和工程分析中得到了广泛的应用^[19-20]。R. C. Koeller^[21]提出用分数阶弹壶元件代替经典黏弹性模型中的 Hooke 弹簧和 Newton 黏壶来描述黏弹性行为。分数阶弹壶的力学响应为

$$\sigma(t) = E^{1-\alpha} \eta^\alpha D^\alpha \varepsilon(t) = E \tau^\alpha D^\alpha \varepsilon(t), \quad (2)$$

式中: σ 为应力, MPa; E 为材料的弹性系数; η 为材料的黏性; D^α 为 Riemann-Liouville 分数求导^[22]; α 为分数阶数, $0 < \alpha < 1$; τ 为弹壶平均松弛时间, $\tau = \eta/E$ 。分数阶弹壶如图 4 所示。当 $\alpha=0$ 时, 式 (2) 退化为 Hooke 弹簧; 当 $\alpha=1$ 时, 式 (2) 退化为 Newton 黏壶。分数阶弹壶可以表征从固态到液态的材料性质转变, 模型参数具有明确的物理意义。

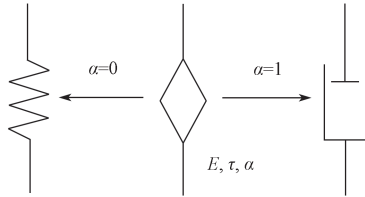


图 4 分数阶弹壶示意图

Fig. 4 The schematic diagram of the fractional springpot

为了克服传统模型在描述非线性行为方面的不足, 提高分数阶流变模型的表征能力, 将广义 Kelvin 模型中的 Newton 黏壶替换为分数阶弹壶元件, 构建了广义分数阶 Kelvin 模型。该模型由一个胡克弹簧、 n 个分数阶 Kelvin 体和一个分数阶弹壶串联组成, 如图 5 所示。

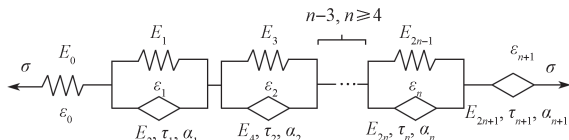


图 5 广义分数阶 Kelvin 模型

Fig. 5 Generalized fractional Kelvin model

在应力 σ 作用下, 模型应变分别为 $\varepsilon_0 = \sigma/E_0$ 、

$\varepsilon_{n+1} = \sigma / (E_{2n+1} \tau_{n+1}^{\alpha_{n+1}} D^{\alpha_{n+1}})$ 。由此可得, Hooke 弹簧和分数阶弹壶串联后的应变为 $\varepsilon_c = \varepsilon_0 + \varepsilon_{n+1}$, 其本构方程为

$$\sigma = \frac{E_0 E_{2n+1} \tau_{n+1}^{\alpha_{n+1}} D^{\alpha_{n+1}}}{E_0 + E_{2n+1} \tau_{n+1}^{\alpha_{n+1}} D^{\alpha_{n+1}}} \varepsilon_c. \quad (3)$$

在单位阶跃载荷作用下, 利用式 (3) 的 Laplace 变换, 可以得到 Hooke 弹簧和分数阶弹壶串联的蠕变柔量 ($J_c(t)$)。

$$\begin{aligned} J_c(t) &= L^{-1} \left(\frac{E_0 + E_{2n+1} \tau_{n+1}^{\alpha_{n+1}} s^{\alpha_{n+1}}}{E_1 E_{2n+1} \tau_{n+1}^{\alpha_{n+1}} s^{\alpha_{n+1}}} \cdot \frac{1}{s} \right) = \\ &= \frac{1}{E_0} L^{-1} \left[\left(1 + \frac{E_0}{E_{2n+1}} (\tau_{n+1} s)^{-\alpha_{n+1}} \right) \frac{1}{s} \right] = \\ &= \frac{1}{E_0} L^{-1} \left[\frac{1}{s} + \frac{E_0}{E_{2n+1}} \tau_{n+1}^{-\alpha_{n+1}} s^{-\alpha_{n+1}-1} \right] = \\ &= \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_{2n+1}} \left(\frac{t}{\tau_{n+1}} \right)^{\alpha_{n+1}} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha_{n+1})}. \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $\Gamma(\cdot)$ 为 gamma 函数^[23]。

以第一个分数阶 Kelvin 体 (见图 6) 为例, 讨论中间 n 个分数阶 kelvin 体的本构关系。

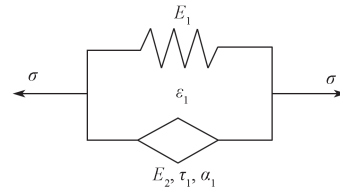


图 6 第一个分数阶 Kelvin 体

Fig. 6 The first fractional Kelvin body

在应力 σ 下, 弹簧和弹壶的应变为 ε_1 , 应力分别为 σ_1 和 σ_2 , 则分数阶 Kelvin 体的总应力为 $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ 。构成关系为

$$\sigma = (E_1 + E_2 \tau_1^{\alpha_1} D^{\alpha_1}) \varepsilon_1. \quad (5)$$

对式 (5) 进行 Laplace 变换, 得到单位阶跃载荷下分数阶 Kelvin 体的蠕变柔量 $J_k(t)$,

$$J_k(t) = L^{-1} \left(\frac{1}{E_1 + E_2 \tau_1^{\alpha_1} s^{\alpha_1}} \cdot \frac{1}{s} \right) = L^{-1} \left[\frac{s^{-\alpha_1-1}}{E_1 s^{-\alpha_1} + E_2 \tau_1^{\alpha_1}} \right]. \quad (6)$$

在此, 引入双参数 Mittag-Leffler 函数, 即

$$E_{a,b}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+b)}, \quad (7)$$

式中, a 和 b 为常数。Mittag-Leffler 函数具有以下 Laplace 变换性质^[24]:

$$\bar{f}(t) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad (8)$$

基于式(6)~(8), 推导出分数阶 Kelvin 体的 $J(t)$ 表达式, 即

$$J(t) = \frac{1}{E_1} E_{-\alpha_1, 1} \left(-\frac{E_2 \tau_1^{\alpha_1}}{E_1 t^{\alpha_1}} \right) = \frac{1}{E_2} \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^{\alpha_1} E_{\alpha_1, 1+\alpha_1} \left[-\frac{E_1}{E_2} \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^{\alpha_1} \right] \quad (9)$$

根据蠕变柔量和应变之间的关系:

$$\varepsilon(t) = \sigma J(t) \quad (10)$$

最后, 结合式(8)和式(9), 得到 GFK 模型的总 $\varepsilon(t)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \sigma \cdot \left\{ \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_2} \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^{\alpha_1} E_{\alpha_1, 1+\alpha_1} \left[-\frac{E_1}{E_2} \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^{\alpha_1} \right] + \dots + \right. \\ & \left. \frac{1}{E_{2n}} \left(\frac{t}{\tau_n} \right)^{\alpha_n} E_{\alpha_n, 1+\alpha_n} \left[-\frac{E_{2n-1}}{E_{2n}} \left(\frac{t}{\tau_n} \right)^{\alpha_n} \right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{E_{2n+1}} \left(\frac{t}{\tau_{n+1}} \right)^{\alpha_{n+1}} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha_{n+1})} \right\} = \\ & \sigma \cdot \left\{ \frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_{2i}} \left(\frac{t}{\tau_i} \right)^{\alpha_i} E_{\alpha_i, 1+\alpha_i} \left[-\frac{E_{2i-1}}{E_{2i}} \left(\frac{t}{\tau_i} \right)^{\alpha_i} \right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{E_{2n+1}} \left(\frac{t}{\tau_{n+1}} \right)^{\alpha_{n+1}} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha_{n+1})} \right\}, \quad i \in [1, n] \quad (11) \end{aligned}$$

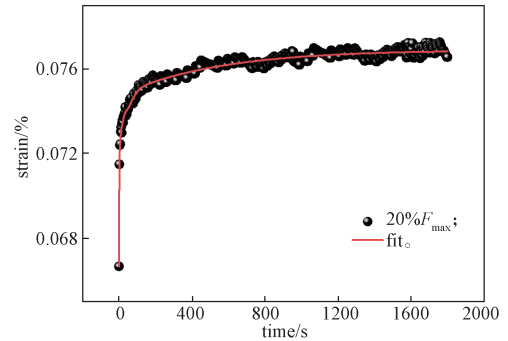
式中, τ_i 表示第 i 个分数 Kelvin 体的松弛时间, 用于描述瓦楞纸箱中流变单元的应力状态。在拟合过程中, 需要根据试验数据对模型参数进行拟合, 并充分考虑材料特性。如果选择的分数 Kelvin 单元较少, 则可能无法捕捉材料的复杂行为, 导致拟合效果较差。相反, 过多的单元会导致过度拟合问题, 降低模型的泛化能力。基于前期的研究^[25], 为了更好地表征系统的微观结构异质性和非线性特性, 提高模型的预测精度, 本研究将采用包含 5 个分数 Kelvin 单元的 GFK 模型拟合瓦楞纸箱的蠕变数据。

4.2 数据拟合与分析

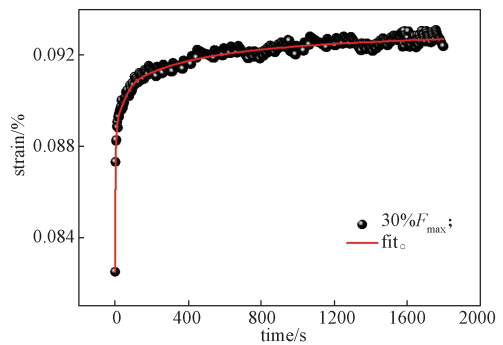
瓦楞纸板和纸箱的理论蠕变模型认为, 它们是由弹性和黏性共同作用的结果。瓦楞纸板和纸箱的弹性是通过 Hooke 弹性元件来模拟的, 而黏性则是通过 Newton 黏壶来模拟的, 这些力学基本单元可以串联或并联, 以创建不同的黏弹性模型。理论上, 该系统可以包含任意数量的弹簧和阻尼器, 以各种组合来

描述黏弹性行为。但在实际应用中, 通常会使用特性明确、结构简单的模型。使用 GFK 模型(式(12))拟合从瓦楞纸箱获得的时间应变数据, 计算结果如图 7 和图 8 所示。拟合结果表明, 带有 5 个分数 Kelvin 体的 GFK 模型与试验数据拟合度(R^2)在 0.954 以上, 吻合良好。可见, 分数流变模型在模拟黏弹性材料的力学行为方面具有较强的优势, 可以准确地描述瓦楞纸箱的蠕变变形。

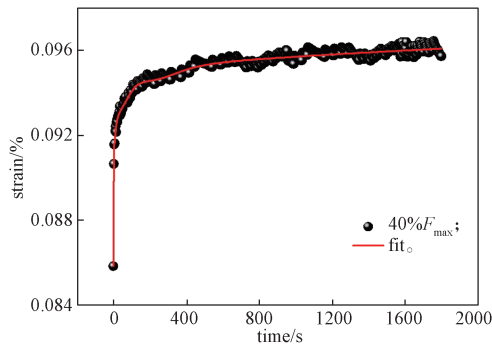
$$\begin{aligned} J(t) = & \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma}{E_2} \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^{\alpha_1} E_{\alpha_1, 1+\alpha_1} \left[-\frac{E_1}{E_2} \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^{\alpha_1} \right] + \\ & \frac{\sigma}{E_4} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{\alpha_2} E_{\alpha_2, 1+\alpha_2} \left[-\frac{E_3}{E_4} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{\alpha_2} \right] + \\ & \frac{\sigma}{E_6} \left(\frac{t}{\tau_3} \right)^{\alpha_3} E_{\alpha_3, 1+\alpha_3} \left[-\frac{E_5}{E_6} \left(\frac{t}{\tau_3} \right)^{\alpha_3} \right] + \\ & \frac{\sigma}{E_8} \left(\frac{t}{\tau_4} \right)^{\alpha_4} E_{\alpha_4, 1+\alpha_4} \left[-\frac{E_7}{E_8} \left(\frac{t}{\tau_4} \right)^{\alpha_4} \right] + \\ & \frac{\sigma}{E_{10}} \left(\frac{t}{\tau_5} \right)^{\alpha_5} E_{\alpha_5, 1+\alpha_5} \left[-\frac{E_9}{E_{10}} \left(\frac{t}{\tau_5} \right)^{\alpha_5} \right] + \\ & \frac{\sigma}{E_{11}} \left(\frac{t}{\tau_6} \right)^{\alpha_6} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha_6)} \quad (12) \end{aligned}$$



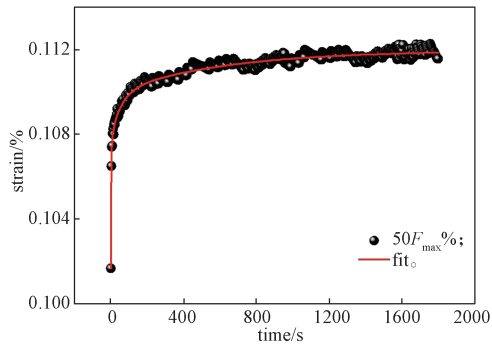
a) 20% $F_{\max}$



b) 30% $F_{\max}$



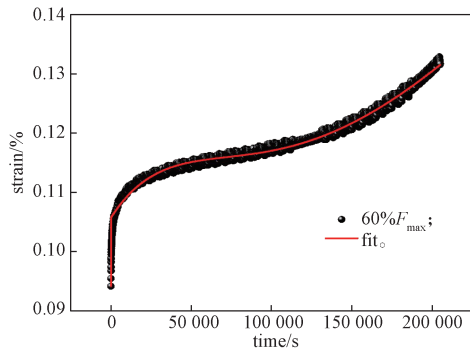
c) $40\%F_{\max}$



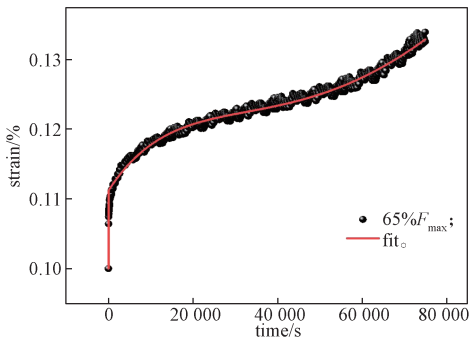
d) $50\%F_{\max}$

图 7 在加载持续 30 min、不同压力下的蠕变行为 GFK 模型分析结果

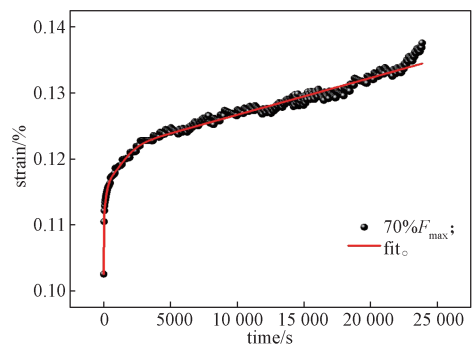
Fig. 7 The results of GFK model analysis of creep behavior under 30 min loading duration and different pressures



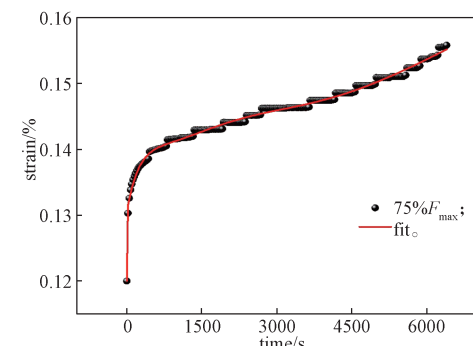
a) $60\%F_{\max}$



b) $65\%F_{\max}$



c) $70\%F_{\max}$



d) $75\%F_{\max}$

图 8 不同保载压力下压溃的蠕变行为 GFK 模型分析结果
Fig. 8 GFK model analysis results of creep behavior of crushing under different pressures

由于 GFK 模型属于唯象本构模型, 其拟合所得参数 (E 、 τ 、 α) 体现的材料性质, 目前尚难以与材料实际表现出的性质直接关联。不过, 根据分数微积分的定义, 分数阶数 α 可以在一定程度上反映材料的宏观特性。当 $\alpha=0$ 时, 分数阶弹簧就会退化成 Hooke 弹簧的形式, 宏观性质为理想固体; 当 $\alpha=1$ 时, 则退化成 Newton 黏壶的形式, 材料宏观性质为理想液体。故仅以第一组实验中 50% 最大压溃力的情况进行分析, GFK 模型的参数如表 1 所示。

表 1 用 GFK 模型拟合蠕变曲线得到的模型参数

Table 1 Model parameters obtained by fitting creep curves using the GFK model

E_0/MPa	E_1/MPa	E_2/MPa	τ_1/min	α_1	E_3/MPa	E_4/MPa	τ_2/min
1.24×10^{-4}	0.005	0.975	1.807	0.45	-0.005	0.990	1.806
α_2	E_5/MPa	E_6/MPa	τ_3/min	α_3	E_7/MPa	E_8/MPa	τ_4/min
0.45	0.003	0.830	0.964	0.60	-0.003	0.830	0.964
α_4	E_9/MPa	E_{10}/MPa	τ_5/min	α_5	E_{11}/MPa	τ_6/min	α_6
0.60	105.263	0.253	187.828	0.60	1.24×10^{-4}	4.372	0.36

从弹性模量和弛豫时间分布可以推断, 在持续应

力作用下, 瓦楞纸箱内部的变形单元更容易被激活。从拟合得到的分数阶分布模式来看, 分数阶弹壶主要模拟弹性特性, 而分数阶 Kelvin 体则模拟瓦楞纸箱从黏弹性到黏塑性的演变过程。

为了进一步研究瓦楞纸板的蠕变行为, 用 GFK 模型的拟合值和对数时间来获得室温压痕下的延迟谱 ($L(\tau)$)^[26]。

$$L(\tau) = dJ(t)/d \ln t - d^2 J(t)/d(\ln t)^2 \Big|_{t=2\tau} \quad (13)$$

延迟谱以权重函数的形式直接表示不同延迟时间 τ 对 Kelvin 体蠕变柔量的贡献。极值表示延迟过程的浓度, 比探索拟合模型参数 (E 、 τ 、 α) 更有意义。不同压力下保载 30 min 的延迟谱如图 9 所示。从图 9 可以看出, 瓦楞纸箱在不同压力下保载 30 min 的蠕变延迟谱分布相似, 呈现出明显的 5 个峰值。瓦楞纸箱的蠕变过程可以分为多个阶段, 每一个峰值则对应了 GFK 模型中分数阶 Kelvin 体的贡献。除此之外, 随着应力的增大, $L(\tau)$ 的最大值减小, 同时变得更宽, 这意味着延迟时间分布在更宽的时间范围内, 系统的有序结构被破坏。原因可能是瓦楞纸箱通常具有较高的蠕变速率, 高应力可能会诱发塑性变形增加, 进而导致内部结构破坏。在高应力状态下, 瓦楞纸箱的变形主要涉及到黏弹性和黏塑性变形。在压力为 50% 时, 延迟谱曲线在 τ 处于 1~10 s 之间出现了一个明显较大的峰值, 可以推断瓦楞纸箱对应力的敏感性升高, 微观结构发生明显的变化, 进而表现出更多的蠕变延迟效应。根据式 (11), 不同参数之间存在耦合关系, 这意味着调整一个参数会影响其他参数。因此, 虽然可以提供 $L(\tau)$ (式 (12)) 及其数值变化, 但仅靠调整一个参数来匹配实际情况可能会很困难。不过, GFK 模型在描述瓦楞纸箱蠕变变形方面还是很有优势的, 因为它不仅能自动满足热力学约束, 还能通过分数阶算子考虑记忆效应。

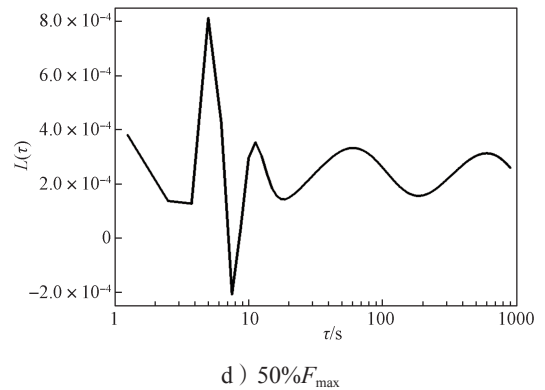
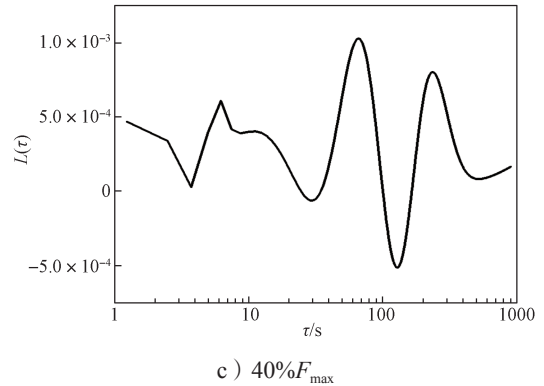
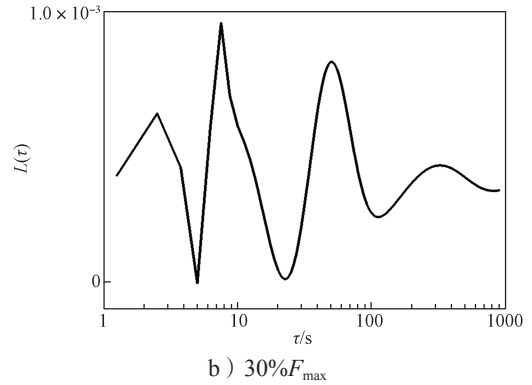
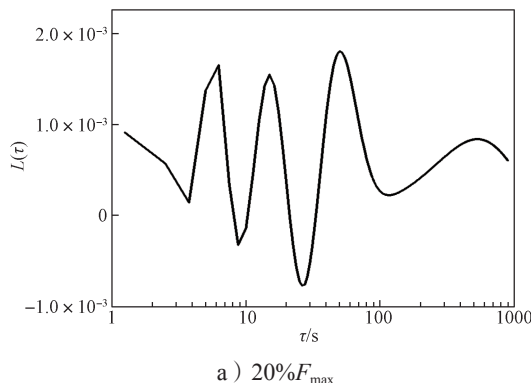


图 9 不同压力下保载 30 min 的 $L(\tau)$

Fig. 9 $L(\tau)$ under different pressures for a 30 min loading

图 10 为不同保载压力下瓦楞纸箱的压溃延迟谱分布。由图 10 可以看出, 当压力为 $60\%F_{\max}$ 和 $65\%F_{\max}$ 时, 延迟谱在相对较短的延迟时间内基本平缓。这表明在两种响应下, 瓦楞纸箱的力学响应相对比较稳定。随着施加的压力增大, 延迟谱出现多个正负峰。这表明系统的响应存在多种振荡模式或不稳定性, 其应与材料的非线性行为或压力对材料内部结构的影响有关。 $70\%F_{\max}$ 和 $75\%F_{\max}$ 的延迟谱曲线在延迟时间较小时呈现类似的分布, 说明存在一个压力阈值, 一旦超过该阈值, 延迟谱会出现明显的峰值。这意味着材料在高压力下表现出更多的非线性特征。

从动态异质性角度看,瓦楞纸箱结构存在各种不同大小的区域,在这些区域中材料微观结构以不同的速率运动,从而导致这些区域的弛豫时间不同。GFK 模型参数中存在的多个分数阶代表了不同区域的局部弛豫,每个 α 对应一个特征弛豫时间,不同区域的局部弛豫行为对整体弛豫有贡献,这反映了材料的微观结构异质性,可以理解为模型中的每个分数 Kelvin 体或分数弹簧点都对应于材料内部的一个变形区域,局部区域的宏观特性通过分数阶值反映出来。因此,通过增加 GFK 模型中 Kelvin 体的数量来进一步探索本征弛豫时间的真实变化,但模型的复杂程度需要以数据量为前提,参数的数量不应多于数据点的数量,否则可能会导致预测性的丧失。

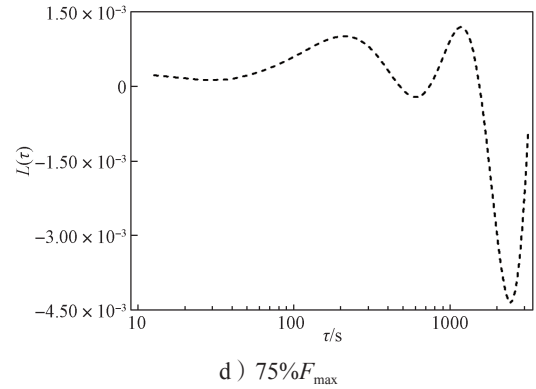
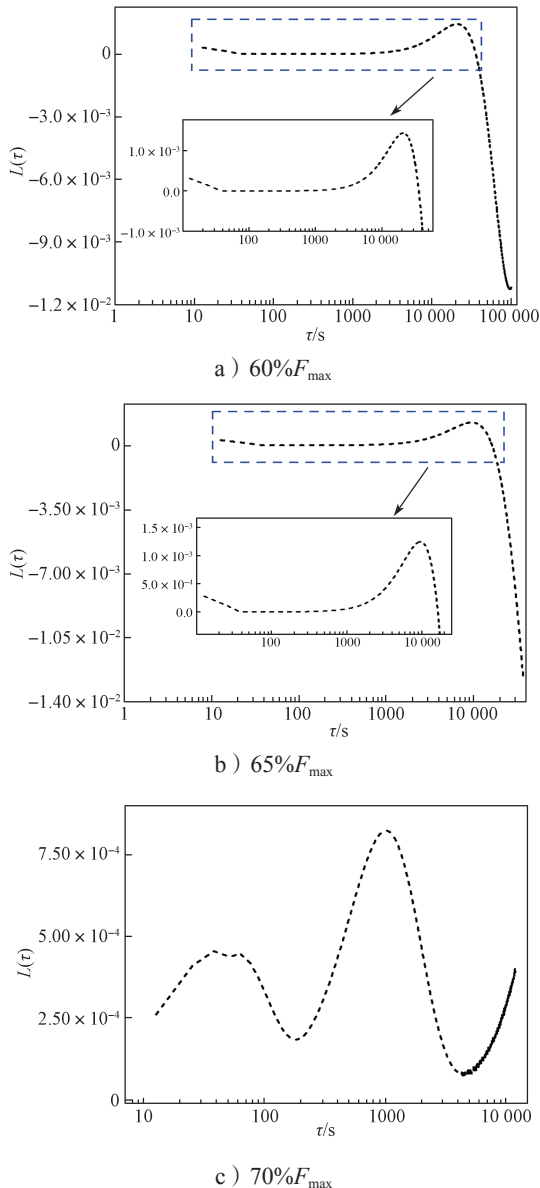


图 10 不同保载压力下压溃的 $L(\tau)$

Fig. 10 $L(\tau)$ of crushing under different pressures

3 结论

本研究以 5 层 AB 楞的瓦楞纸箱为研究对象,利用纸箱抗压机测出纸箱的最大压溃力;然后探究不同压力下保载 30 min 和不同保载压力下瓦楞纸箱直至压溃的蠕变行为;进而用分数阶弹簧取代广义 Kelvin 模型中的 Newton 黏壶,得到广义分数阶 Kelvin (GFK) 模型,实现了对瓦楞纸箱蠕变构效关系的精确描述。结果表明:

1) 瓦楞纸箱在堆码蠕变试验中,保载压力越大,其蠕变曲线的最大应变值也就越大。保载阶段的蠕变可分为两个阶段:在初始阶段,蠕变变形的速率很大;随后进入稳态过程,蠕变变形随时间的变化很小。瓦楞纸箱在压溃力试验中,在达到压溃点之前,这些材料的蠕变速率逐渐降低,保载压力越大,其应变时间曲线的斜率也就越大,纸箱也越容易被压坏。

2) 基于应变-时间序列试验数据,利用 5 个分数 Kelvin 单元的 GFK 模型进行数据拟合。通过该模型得到的数据与试验数据十分贴近,基本符合瓦楞纸箱的蠕变曲线特点。根据拟合结果,进一步绘制瓦楞纸箱在室温下的延迟谱。延迟谱以权重函数的形式表征了不同延迟时间 τ 相应的 Kelvin 单元对蠕变总变形过程的贡献度。瓦楞纸箱在不同压力下保载 30 min 的延迟谱的蠕变延迟谱分布相似,呈现出明显的 5 个峰值,每个峰值对应 GFK 模型中分数阶 Kelvin 体的贡献度。

3) 延迟谱的最大值随应力的增加而减小,同时变得更宽,说明材料有序结构在更宽的时间区间被破坏。这从理论上揭示了瓦楞纸箱蠕变过程结构演化特征,为深入理解实际生产中瓦楞纸箱的力学行为和结构参数设计提供了科学依据,同时也为建立更为准确

的力学本构模型提供了理论基础。

参考文献:

- [1] 郭彦峰, 付云岗, 许文才, 等. 瓦楞纸板结构在运输包装应用中的研究进展 [J]. 包装工程, 2007, 28(8): 6-9, 13.
- [2] 魏建斌, 李彭勃. 包装用瓦楞纸板配纸设计及应用 [J]. 中国包装, 2024, 44(2): 6-10.
- [3] WANG L J, LAI Y Z, WANG Z W. Fatigue Failure and G_{ms} - N Curve of Corrugated Paperboard Box[J]. Journal of Vibration and Control, 2020, 26(11/12): 1028-1041.
- [4] HUANG T C, WANG T F, LIAO K C. Investigations of Structure Strength and Ventilation Performance for Agriproduct Corrugated Cartons Under Long-Term Transportation Trip[J]. Packaging Technology and Science, 2022, 35(11): 821-832.
- [5] 王俊丽, 郑全成. 瓦楞纸箱的含水率对力学性能的影响 [J]. 兰州交通大学学报, 2006, 25(3): 134-136.
- [6] 芦伟娟. 瓦楞纸箱抗压强度试验及有限元分析 [J]. 科技创新与应用, 2023, 13(11): 76-79.
- [7] 王志伟, 方艳平. 湿度对瓦楞纸箱抗压强度的影响 [J]. 包装学报, 2012, 4(1): 1-4.
- [8] 张 琴, 王保升. 瓦楞纸箱堆码性能分析 [J]. 包装工程, 2011, 32(17): 47-51.
- [9] HUSSAIN S, COFFIN D W, TODOROKI C. Investigating Creep in Corrugated Packaging[J]. Packaging Technology and Science, 2017, 30(12): 757-770.
- [10] HOLMVALL M. Predicting Creep Lifetime Performance in Edgewise Compression of Containerboards and for Stacked Corrugated Board Boxes[J]. Packaging Technology and Science, 2022, 35(1): 53-67.
- [11] PARK J, CHANG S, JUNG H M. Numerical Prediction of Equivalent Mechanical Properties of Corrugated Paperboard by 3D Finite Element Analysis[J]. Applied Sciences, 2020, 10(22): 7973.
- [12] NORDSTRAND T. Analysis and Testing of Corrugated Board Panels into the Post-Buckling Regime[J]. Composite Structures, 2004, 63(2): 189-199.
- [13] 汪泽幸, 李 帅, 谭冬宜, 等. 聚氯乙烯涂层膜材料松弛时间谱分析 [J]. 复合材料科学与工程, 2021(11): 21-25.
- [14] 李博文, 郭芳辰, 邓光辉, 等. 基于数学建模方法的异型折叠纸盒运输装箱研究 [J]. 包装学报, 2024, 16(5): 35-42.
- [15] LI B W, LIAO G K, LIU J X, et al. Investigation on the Tensile Rheological Behavior of PA6 Film Based on Fractional Order Model[J]. Materials Research Express, 2023, 10(10): 105302.
- [16] LI K F, YANG C Q, ZHAO Y B, et al. Study on the Creep Behavior of PVA-ECC Based on Fractional-Differential Rheological Model[J]. Construction and Building Materials, 2020, 230: 117064.
- [17] 徐朝阳, 徐奕超. 瓦楞楞型对瓦楞纸箱蠕变性能的影响 [J]. 包装工程, 2011, 32(19): 50-53.
- [18] KONING J, STERN R K. Long-Term Creep in Corrugated Fiberboard Containers[J]. Technical Association of the Pulp and Paper Industry, 1977, 60(12): 128-131.
- [19] XU H Y, JIANG X Y. Creep Constitutive Models for Viscoelastic Materials Based on Fractional Derivatives[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2017, 73(6): 1377-1384.
- [20] JALOCHA D. A Nonlinear Viscoelastic Constitutive Model Taking into Account of Physical Aging[J]. Mechanics of Time-Dependent Materials, 2022, 26(1): 21-31.
- [21] KOELLER R C. Applications of Fractional Calculus to the Theory of Viscoelasticity[J]. Journal of Applied Mechanics, 1984, 51(2): 299-307.
- [22] DILMI M, DILMI M, BENSERIDI H. Variational Formulation and Asymptotic Analysis of Viscoelastic Problem with Riemann-Liouville Fractional Derivatives[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2021, 44(3): 2294-2313.
- [23] PARMAR R. A Class of Extended Mittag-Leffler Functions and Their Properties Related to Integral Transforms and Fractional Calculus[J]. Mathematics, 2015, 3(4): 1069-1082.
- [24] NAZIR A, RAHMAN G, ALI A, et al. On Generalized Fractional Integral with Multivariate Mittag-Leffler Function and Its Applications[J]. Alexandria Engineering Journal, 2022, 61(11): 9187-9201.
- [25] LI B W, LIAO G K, LIU Y J, et al. Investigation on the Creep Mechanism of PA6 Films Based on Quasi Point Defect Theory[J]. Scientific Reports, 2024, 14: 22169.
- [26] PENG J, LONG Z L, WEI H Q, et al. Creep Behavior of a Fe-Based Bulk Amorphous Alloy Using Nanoindentation[J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(6): 4059.

(责任编辑: 邓 彬)

(下转第102页)