

斜支撑非线性包装系统关键件的破损评价

doi:10.20269/j.cnki.1674-7100.2025.1007

段宁宁^{1,2} 余立^{1,2}

- 福建技术师范学院
材料与包装工程学院
福建 福州 350300
- 食品软塑包装技术福建省
高校工程研究中心
福建 福州 350300

摘要: 对双自由度斜支撑非线性包装系统简化模型进行受力分析, 得到系统在后峰锯齿波下的运动微分方程。采用 Runge-Kutta 法求解微分方程, 以临界加速度、临界速度为坐标, 绘制破损边界曲线和破损边界曲面, 探讨系统支撑角等参量对系统关键件破损特性的影响。研究表明: 随频率比变大, 曲线的破损区变小、安全区变大; 减小支撑角会使曲线安全区变大, 一般控制在 70°~90°; 无量纲脉冲激励幅值变大使安全区也随之变大; 增大系统质量比也会使系统安全区变大。因此, 通过控制相关参量可提高系统关键件的抗冲击性。

关键词: 斜支撑; 后峰锯齿波; 破损边界; 关键件; 抗冲击性

中图分类号: TB485.1

文献标志码: A

文章编号: 1674-7100(2025)01-0056-05

引文格式: 段宁宁, 余立. 斜支撑非线性包装系统关键件的破损评价 [J]. 包装学报, 2025, 17(1): 56-60.

1 研究背景

在缓冲包装动力学领域, 针对非线性包装系统的研究已取得很大进展。正如王桂英等^[1]的分析, 很多学者在建模方法、振动测试方法、破损评价方法等方面取得了显著的成果。在非线性系统力学研究中, 常用两种理论方法——冲击谱和破损边界。

1968 年, R. E. Newton 教授最先提出破损边界的概念, 充分表征了关键件破损时产品加速度的影响^[2]。邓培畅等^[3]分析了多关键件产品的破损边界在不同缓冲材料下的变化规律。姜权、李宏卫等^[4-5]针对三次非线性系统分析求得破损边界曲线。严敏等^[6-7]研究了斜支撑双自由度包装系统的跌落破损评价。Wang Z. W. 等^[8]评价了双自由度产品的跌落破损特性。Wang J. 等^[9]探讨了正切型双自由度包装系统的跌落破损特性。伍瑾等^[10]为研究产品上的关键件受到持续跌落冲击时的动力学特性, 对聚乙烯泡沫

的缓冲性能进行分析。对斜支承包系统, 陈安军团队^[11-17]分析了其在矩形波和半正弦波作用下的冲击响应谱和破损边界理论。

斜支撑包装系统主要应用于空投包装、精密仪器设备的运输。本文对双自由度斜支撑非线性系统简化模型进行受力分析, 得到系统在后峰锯齿波下的运动微分方程, 探讨系统支撑角等参量对系统关键件破损特性的影响, 并通过控制相关参量来提高系统关键件的抗冲击性, 以期对斜支撑缓冲包装结构的优化设计提供一定的理论依据。

2 系统运动微分方程的建立

双自由度斜支撑包装系统的简化模型如图 1 所示。图中: m_1 为系统关键件质量; m_2 为系统主体质量 (不包括关键件部分); k_1 为 m_1 与 m_2 间的刚度; k_2 为 m_2 与外包装间弹簧的刚度; l_0 为倾斜放置的弹

收稿日期: 2024-10-05

基金项目: 2024 年校级教改项目 (XJJY202412)

作者简介: 段宁宁, 女, 讲师, 主要研究方向为运输包装设计、包装动力学, E-mail: 760410267@qq.com

簧原长; φ_0 为弹簧倾斜放置的角度; x_1 为易损件的位移响应; x_2 为产品主体部分的位移响应; \ddot{u}_0 为激励加速度。

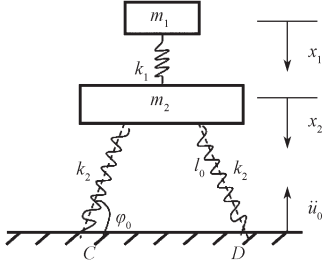


图1 斜支撑系统简化模型

Fig. 1 Simplified tilted support spring system

根据力学分析, 得到斜支撑包装系统的运动微分方程为

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = k_1(x_2 - x_1), \\ m_2 \ddot{x}_2 = -2k_2 \left(a_0 x_2 + \frac{b_0}{l_0} x_2^2 + \frac{c_0}{l_0^2} x_2^3 \right) - k_1(x_2 - x_1), \\ a_0 = \sin^2 \varphi_0, \\ b_0 = -\frac{3}{2} \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0, \\ c_0 = \frac{1}{2} (1 - 6 \sin^2 \varphi_0 + 5 \sin^4 \varphi_0). \end{cases} \quad (1)$$

后峰锯齿波的数学表达式为

$$\ddot{u}_0 = \begin{cases} \frac{\ddot{u}_{0m} t}{t_0}, & 0 \leq t \leq t_0; \\ 0, & t > t_0. \end{cases} \quad (2)$$

式中: \ddot{u}_{0m} 为激励加速度幅值; t 为时间; t_0 为脉冲激励时间。

将式(1)与式(2)结合可得系统在后峰锯齿波作用下的运动微分方程为

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 - k_1(x_2 - x_1) = 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + 2k_2 \left(a_0(x_2 + u_0) + \frac{b_0}{l_0}(x_2 + u_0)^2 + \frac{c_0}{l_0^2}(x_2 + u_0)^3 \right) + k_1(x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

系统关键件和主体部分的初始条件为: $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0$; $\dot{x}_1(0)=0$, $\dot{x}_2(0)=0$ 。

为方便研究系统相关参量对其破损特性的影响, 对方程(3)进行无量纲化。令 $y_1 = \frac{x_2 - x_1}{l_0}$ 、

$$y_2 = \frac{x_2 + u_0}{l_0}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k_2}{m_2}}, \quad \lambda_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2},$$

$$\lambda_2 = \frac{m_1}{m_2}, \quad T = \frac{1}{\omega_2}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad \tau_0 = \frac{t_0}{T}, \quad \beta = \frac{T^2}{l_0}.$$

整理后得到

$$\begin{cases} \frac{d^2 y_1}{d\tau^2} + (a_0 y_2 + b_0 y_2^2 + c_0 y_2^3) + \lambda_1^2 \lambda_2 y_1 + \lambda_1^2 y_1 = 0, \\ \frac{d^2 y_2}{d\tau^2} + (a_0 y_2 + b_0 y_2^2 + c_0 y_2^3) + \lambda_1^2 \lambda_2 y_1 = \beta \ddot{u}_0. \end{cases} \quad (4)$$

初始条件转化为 $y_1(0)=0$, $y_2(0)=0$; $\frac{dy_1(0)}{d\tau}=0$,

$$\frac{dy_2(0)}{d\tau}=0.$$

对式(2)的后峰锯齿波数学表达式无量纲化处理, 转化为

$$\beta \ddot{u}_0 = \begin{cases} \frac{\beta \ddot{u}_{0m} \tau}{\tau_0}, & 0 \leq \tau \leq \tau_0; \\ 0, & \tau > \tau_0. \end{cases} \quad (5)$$

式中 $\beta \ddot{u}_{0m}$ 为无量纲脉冲激励幅值。

3 参量对系统关键件破损特性的影响

为探讨频率比、支撑角、无量纲脉冲激励幅值和质量比对斜支撑包装系统关键件破损特性的影响, 采用四阶 Runge-Kutta 法求解运动微分方程(4), 绘制破损边界曲线^[18]和破损边界曲面。以临界加速度

$\Gamma = \frac{\ddot{u}_{0m}}{\ddot{x}_{1m}}$ 、临界速度 $V = \tau_0 \Gamma$ 为坐标, 建立破损边界曲线和曲面。

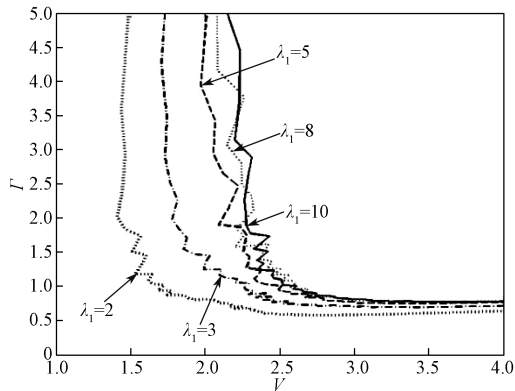
为做进一步无量纲化计算, 对临界加速度

$\Gamma = \frac{\ddot{u}_{0m}}{\ddot{x}_{1m}}$ 进行转换, 将 y_1 、 y_2 与运动微分方程(4)结合整理, 得到

$$\Gamma = \frac{\ddot{u}_{0m}}{\ddot{x}_{1m}} = \frac{\beta \ddot{u}_{0m}}{\left(\frac{d^2 y_2}{d\tau^2} - \frac{d^2 y_1}{d\tau^2} - \beta \ddot{u}_0 \right)_m} = \frac{\beta \ddot{u}_{0m}}{(\lambda_1^2 y_1)_m}. \quad (6)$$

3.1 λ_1 对关键件破损特性的影响

设定 $\varphi_0=75^\circ$ 、 $\lambda_2=0.2$ 、 $\beta \ddot{u}_{0m}=0.2$, 当频率比 $\lambda_1=10, 8, 5, 3, 2$ 时, 系统关键件破损曲线如图2所示。由图可知, λ_1 增大, 水平曲线上移、竖直曲线右移, 损坏区变小, 安全区变大。

图2 不同 λ_1 时的破损边界曲线Fig. 2 The damage boundary curve for different λ_1

设定 $\varphi_0=75^\circ$ 、 $\lambda_2=0.2$ 、 $\beta\ddot{u}_{0m}=0.2$ ，以 λ_1 、 Γ 、 V 为坐标轴，构建系统关键件的破损边界曲面，如图3所示。由图可知， λ_1 由小变大，曲面所包围的损坏区变小。

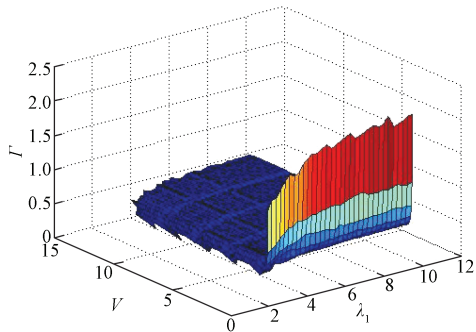
图3 不同 λ_1 时的破损边界曲面Fig. 3 The damage boundary surface for different λ_1

图2和图3表明：当 λ_1 变大时，损坏区变小，安全区变大。当 $\lambda_1 > 5$ 时，曲线变化较小，稳定性好；当 $\lambda_1 < 5$ 时，随着 λ_1 增大而曲线损坏区变化较大。在斜支撑包装结构设计中，应取 $\lambda_1 > 5$ 。

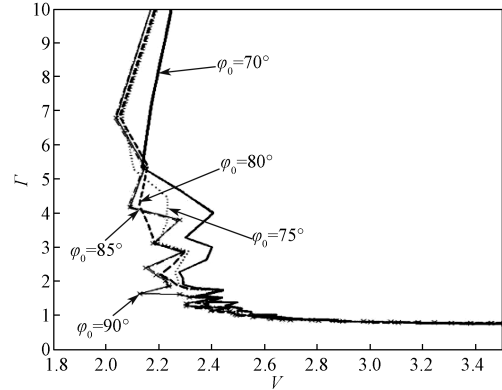
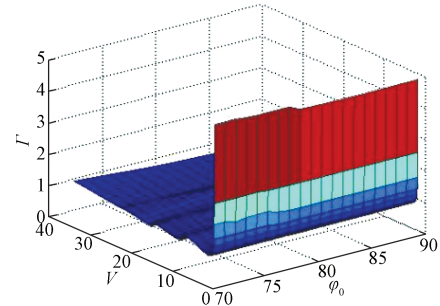
3.2 φ_0 对关键件破损特性的影响

设定 $\lambda_1=10$ 、 $\lambda_2=0.2$ 、 $\beta\ddot{u}_{0m}=0.2$ ，当支撑角 $\varphi_0=70^\circ$ 、 75° 、 80° 、 85° 、 90° 时，系统关键件破损曲线如图4所示。由图可知，随着 φ_0 变大，竖直曲线左移，损坏区变大，安全区变小。

设定 $\lambda_1=10$ 、 $\lambda_2=0.2$ 、 $\beta\ddot{u}_{0m}=0.2$ ，以 φ_0 、 Γ 、 V 为坐标轴，构建系统关键件的破损边界曲面，如图5所示。由图可知，随着 φ_0 由小变大，曲面所包围的损坏区变大。

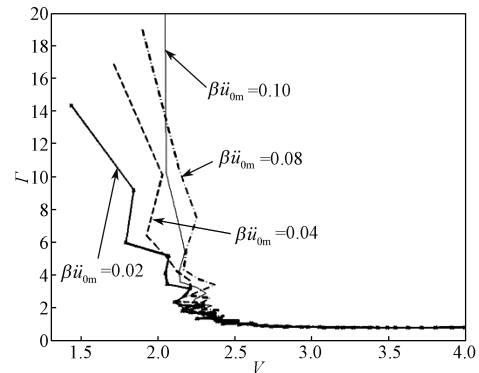
图4和图5表明，当 φ_0 变大时，损坏区变大，安全区变小。与垂直支撑（ $\varphi_0=90^\circ$ ）相比，斜支撑

的安全性更高。在缓冲包装结构设计中，应选取 $70^\circ \leq \varphi_0 < 90^\circ$ 。

图4 不同 φ_0 时的破损边界曲线Fig. 4 The damage boundary curve for different φ_0 图5 不同 φ_0 时的破损边界曲面Fig. 5 The damage boundary surface for different φ_0

3.3 $\beta\ddot{u}_{0m}$ 对关键件破损特性的影响

设定 $\varphi_0=75^\circ$ 、 $\lambda_1=10$ 、 $\lambda_2=0.2$ ，当无量纲脉冲激励幅值 $\beta\ddot{u}_{0m}=0.02, 0.04, 0.08, 0.10$ 时，系统关键件破损曲线如图6所示。由图可知，随着 $\beta\ddot{u}_{0m}$ 变大，竖直线右移，损坏区变小，安全区变大。

图6 不同 $\beta\ddot{u}_{0m}$ 时的破损边界曲线Fig. 6 The damage boundary curve for different $\beta\ddot{u}_{0m}$

设定 $\varphi_0=75^\circ$ 、 $\lambda_1=10$ 、 $\lambda_2=0.2$ ，以 $\beta\ddot{u}_{0m}$ 、 Γ 、 V 为

坐标轴, 构建系统关键件的破损边界曲面, 如图 7 所示。由图可知, $\beta\ddot{u}_{0m}$ 由小变大, 则曲面所包围的损坏区变小。

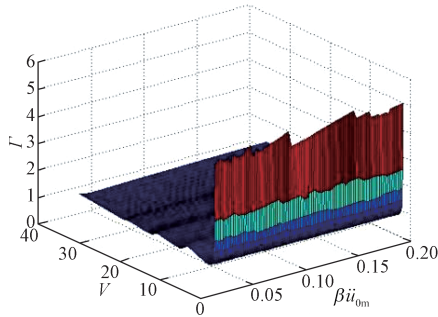


图 7 不同 $\beta\ddot{u}_{0m}$ 时的破损边界曲面

Fig. 7 The damage boundary surface for different $\beta\ddot{u}_{0m}$

图 6 和图 7 表明: 随 $\beta\ddot{u}_{0m}$ 变大时, 曲线的损坏区变小, 安全区变大。当 \ddot{u}_{0m} 不变时, 增大参数

$$\beta = \frac{T^2}{l_0}$$

可改善斜支撑系统的抗破损性。

3.4 λ_2 对关键件破损特性的影响

设定 $\varphi_0=75^\circ$ 、 $\lambda_1=10$ 、 $\beta\ddot{u}_{0m}=0.2$, 当质量比 $\lambda_2=0.01, 0.05, 0.10, 0.20$ 时, 系统关键件破损曲线如图 8 所示。由图可知, λ_2 变大, 竖直曲线右移, 损坏区变小, 安全区变大。

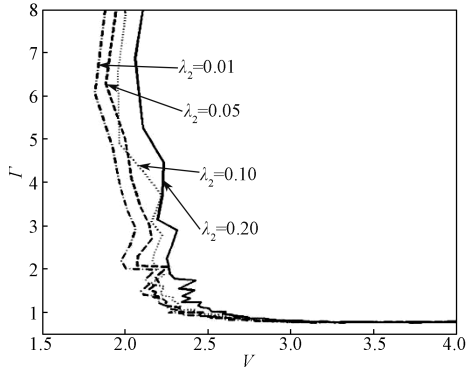


图 8 不同 λ_2 时的破损边界曲线

Fig. 8 The damage boundary curve for different λ_2

设定 $\varphi_0=75^\circ$ 、 $\lambda_1=10$ 、 $\beta\ddot{u}_{0m}=0.2$, 以 λ_2 、 Γ 、 V 为坐标轴, 构建系统关键件的破损边界曲面, 如图 9 所示。由图可知, 随 λ_2 增大, 曲面所包围的损坏区变小, 安全区变大。

图 8 和图 9 表明: 随 λ_2 的增大曲线安全区增大。

因此, 在斜支撑缓冲包装结构设计中, 可通过控制 λ_1 、 φ_0 、 $\beta\ddot{u}_{0m}$ 及 λ_2 等参量的取值, 以提高系统关键件的破损特性。

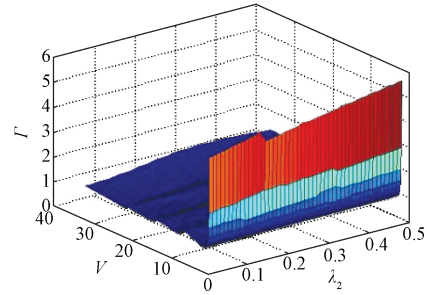


图 9 不同 λ_2 时的破损边界曲面

Fig. 9 The damage boundary surface for different λ_2

4 结论

本文以双自由度斜支撑非线性系统为研究对象, 根据牛顿第二定律求得系统在后峰锯齿波下的运动微分方程, 采用 Runge-Kutta 法求解方程, 探讨了相关参量对系统关键件破损特性的影响。根据二维破损边界曲线和三维破损边界曲面, 可得如下结论:

- 1) 随频率比变大, 曲线的破损区变小、安全区变大;
- 2) 减小支撑角会使曲线安全区变大, 一般控制为 $70^\circ \sim 90^\circ$;
- 3) 无量纲脉冲激励幅值变大, 安全区随之变大;
- 4) 增大系统质量比也会使系统安全区变大。

因此, 通过控制相关参量可提高系统关键件的抗冲击性。

参考文献:

- [1] 王桂英, 吴月. 包装动力学研究进展及研究方向分析[J]. 森林工程, 2015, 31(1): 78-83.
- [2] NEWTON R. E. Fragility Assessment Theory and Practice[EB/OL]. [2024-09-18]. https://xueshu.baidu.com/usercenter/paper/show?paperid=f762f577050d589701ec6c26acfd92ac&site=xueshu_se.
- [3] 邓培畅, 王志伟. 多个关键部件产品的破损边界[J]. 包装工程, 2023, 44(21): 46-53.
- [4] 姜权, 王军, 卢立新, 等. 三次非线性包装系统关键部件破损曲面研究[J]. 包装工程, 2012, 33(17): 53-56.
- [5] 李宏卫, 王军. 三次型非线性包装系统跌落冲击响应分析[J]. 包装工程, 2015, 36(19): 18-22.
- [6] 严敏, 陈安军. 斜支撑系统包装物体的跌落破损边界研究[J]. 噪声与振动控制, 2014, 34(1): 88-91, 177.

- [7] 严敏, 陈安军. 斜支承弹簧系统跌落冲击响应及影响因素分析 [J]. 包装工程, 2013, 34(23): 68-71.
- [8] WANG Z W, JIANG J H. Evaluation of Product Dropping Damage Based on Key Component[J]. Packaging Technology and Science, 2010, 23(4): 227-238.
- [9] WANG J, JIANG J H, LU L X, et al. Dropping Damage Evaluation for a Tangent Nonlinear System with a Critical Component[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2011, 61(8): 1979-1982.
- [10] 伍瑾, 卢富德, 王彪, 等. 易损件在连续跌落冲击载荷作用下的动力学响应 [J]. 振动与冲击, 2023, 42(20): 275-279.
- [11] 孔凡玲, 陈安军. 半正弦波脉冲激励下斜支承系统冲击特性 [J]. 噪声与振动控制, 2012, 32(2): 41-44.
- [12] 陈安军. 斜支承弹簧包装系统冲击特性研究 [J]. 包装工程, 2010, 31(15): 1-3, 14.
- [13] 严敏, 陈安军. 跌落工况下斜支承系统响应分析的变分迭代法 [J]. 包装工程, 2012, 33(13): 71-74, 79.
- [14] CHEN A J. The Shock Characteristics of Tilted Support Spring Packaging System with Critical Components[J]. Shock and Vibration, 2014, 2014: 496035.
- [15] DUAN N N, SONG S, CHEN A J. The Dynamic Evaluation of Tilted Support Spring Nonlinear System with Critical Components Under the Action of a Rectangular Pulse[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014, 2014: 404163.
- [16] DUAN N N, HAO M, CHEN A J. Damage Evaluation of Critical Components of Tilted Support Spring Nonlinear System Under a Rectangular Pulse[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015: 910143.
- [17] 段宁宁, 陈安军. 矩形脉冲激励下斜支承系统易损件的破损评价 [J]. 噪声与振动控制, 2014, 34(3): 73-77, 114.
- [18] 宋宝丰, 袁志庆. 缓冲包装设计中构建破损边界曲线的新途径 [J]. 包装学报, 2013, 5(3): 46-50.

(责任编辑: 邓光辉)

Damage Evaluation of Tilted Support Spring Packaging System with Critical Components

DUAN Ningning^{1,2}, YU Li^{1,2}

(1. School of Materials and Packaging Engineering, Fujian Polytechnic Normal University, Fuzhou 350300, China;
2. Fujian Universities and Colleges Engineering Research Center of Soft Plastic Packaging Technology for Food, Fuzhou 350300, China)

Abstract: The simplified model was established for the dual-degree-of-freedom tilted support spring system. Then, the equations of the key components were obtained under the post-peak-sawtooth wave. To investigate the influence of the support angle and other parameters on the damage evaluation of the key components, the Runge-Kutta method was used to solve the equations, and the damage boundary curves and surfaces were plotted using the critical acceleration and the critical velocity as coordinates. The results show that as the frequency ratio increases, the size of the damage zone decreases and the size of the safety zone increases, while reducing the support angle, or increasing the amplitude of the dimensionless peak pulse and the mass ratio can increase the size of the safety zone. In addition, the support angle generally is controlled within $70^\circ \sim 90^\circ$. Therefore, by controlling these parameters, the impact resistance of the key components can be improved.

Keywords: tilted support; post-peak-sawtooth wave; damage boundary; key component; impact resistance