

工程结构有限元分析的应力奇异问题及抑制方法

doi:10.20269/j.cnki.1674-7100.2025.1004

黄镇城¹ 林益斌²

雷志勇¹ 滑广军³

1. 深圳冠为科技股份有限公司

技术中心

广东 深圳 518110

2. 湖南工业大学

先进材料与制造学院

湖南 株洲 412007

3. 湖南工业大学

包装与材料工程学院

湖南 株洲 412007

摘要: 针对工程结构有限元分析产生的应力奇异现象进行了研究, 并提出了应力奇异抑制方法。将应力奇异分为结构几何突变应力奇异、约束刚度突变应力奇异、材料性能突变应力奇异问题。利用 ANSYS Workbench 仿真平台, 分别建立了 3 种典型应力奇异模型, 并进行了数值模拟分析。研究表明: 有限元分析过程中存在应力奇异现象的本质是约束刚度突变问题所造成, 通过修正模型及约束等效措施能够抑制应力奇异现象。

关键词: 有限元分析; 应力集中; 应力奇异; 约束刚度突变

中图分类号: O343.4

文献标志码: A

文章编号: 1674-7100(2025)01-0031-09

引文格式: 黄镇城, 林益斌, 雷志勇, 等. 工程结构有限元分析的应力奇异问题及抑制方法 [J]. 包装学报, 2025, 17(1): 31-39.

1 研究背景

随着我国重型装备制造业的发展, 重型装备在储运过程中的安全性逐渐得到重视。重型装备储运装置结构复杂, 承载条件严酷, 故准确获取储运装置的状态参数是结构设计及优化的重要依据。有限元技术能够获得结构全场域信息, 已成为复杂工程结构优化设计的重要手段。使用有限元技术对复杂工程结构进行仿真分析时, 常会出现应力集中与应力奇异问题。应力集中一般可以通过网格细化得到收敛解, 应力奇异则会导致计算结果偏离真实解, 影响重型装备结构性能评估的准确度^[1]。因此, 正确理解和处理有限元分析过程中的应力集中及应力奇异问题, 对于复杂工程结构的安全评估和优化具有重要意义。

国内外学者围绕工程结构中的应力集中现象和应力奇异问题进行了相关研究。A. Khechai 等^[2]研究

了在单轴载荷作用下复合材料板和各向同性单孔板的应力集中系数。A. F. Arezoodar 等^[3]讨论了不同材料特性及界面连接角对异种材料界面应力集中的影响。结果表明, 与直接头相比, 凸接口接头在连接角处的应力减小。A. Y. Fedorov 等^[4]提出使用弹性材料填充缺陷腔来修复弹性体中的 V 形缺口的变体, 数值模型表明, 填充后应力奇异性 and 由此引起的应力集中可以消除。L. van Lich 等^[5]采用不同的屈服条件对复合材料接触面的应力场进行了数值分析, 研究了弹性和塑性应力奇异指数与接触面角度的变化规律。张进等^[6]对 45 号钢孔板的动态应力集中问题进行了系统的有限元分析, 得出塑性应力集中系数与载荷大小及加载速度有关。温广军等^[7]分析了圆角尺寸对有限元计算结果准确性的影响, 并与工程实际对比, 验证了有限元计算结果的准确性。刘三勇等^[8]探究了有限元分析中存在的应力奇异与应力集中的

收稿日期: 2024-11-10

基金项目: 湖南省自然科学基金联合基金资助项目 (2022JJ30223); 湖南省教育厅科研基金资助重点项目 (21A0353); 国家重点研发计划基金资助项目 (2023YFC3904603); 湖南省高等学校教学改革研究基金资助项目 (HNJG-2021-0123)

作者简介: 黄镇城, 男, 工程师, 主要从事包装工程技术研究, E-mail: 1589208082@qq.com

通信作者: 滑广军, 男, 教授, 博士, 主要从事运输包装、结构 CAE 研究, E-mail: hgi757@126.com

区别。解胜^[9]利用有限元分析了平面双材料圆环结构产生的界面端应力奇异现象,并基于多重应力奇异性数值分析方法,结合有限元分析,提出了平面双材料圆环界面应力奇异性特征值的计算方法。唐建平^[10]针对不同材料探究了几何形状、材料参数和载荷对应力奇异及界面应力的影响,并提出一种通过改变界面交界处几何形状的方法优化界面大应力区域的应力。

目前工程结构有限元分析中对应力集中问题的研究比较充分,而对应力奇异问题的研究不够系统。本文对工程结构中存在的因结构几何突变、约束刚度突变及材料性能突变所造成的应力奇异问题进行了研究,通过建立典型有限元模型,揭示引起应力奇异的原因,并提出了应力奇异抑制方法,以期工程技术人员正确理解和解决应力奇异问题提供参考。

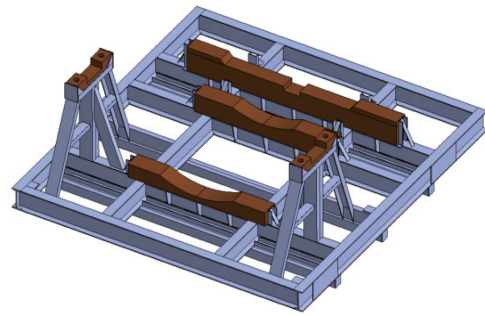
2 应力奇异的特征

2.1 应力奇异和应力集中的区别

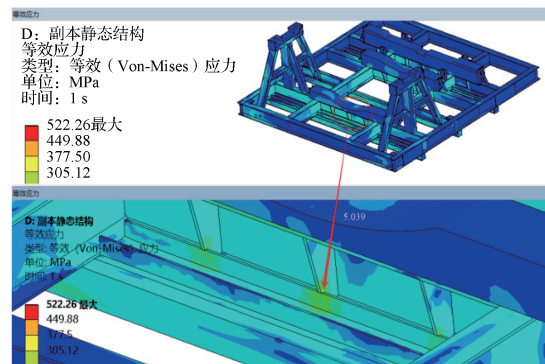
工程结构在孔洞、凹槽、凸起或缺口等截面处呈现几何形状突变,会引起局部应力的显著升高。这种局部应力峰值远超理论公式计算所得数值的现象称为应力集中,应力集中反映了实际结构中几何特性对力学行为的显著影响^[11]。而应力奇异是指有限元分析中由于几何结构或载荷所引起的弹性理论计算应力值无限大的现象^[12]。某重型装备用 Q235 钢制储运装置的几何模型及应力云图如图 1 所示。图 1b 的有限元计算云图表明:在焊接部位存在应力奇异,该部位的应力值超过了材料许用应力。应力奇异问题出现的主要原因是模型过度简化、实际载荷施加方式及边界条件设置等问题。有限元分析是基于弹性理论的数学模型,仿真求解会导致求解应力函数时出现奇异解,在尖角处或受力面积积极小处的应力出现不收敛现象。实际的工程结构中任何构件的强度都是有限的,不可能存在无限大的应力值,工程结构中同样不会出现绝对的直角边。如零件在切削加工时,刀具的切削刃上均会存在圆弧,所以没有绝对的直角边^[13]。应力奇异问题往往会导致有限元计算过程中解的收敛速度变慢甚至计算错误。

应力奇异问题出现的最主要特征为:模型在有限元求解过程中,随着网格尺寸的不断变小,求解得到的应力无限变大。这是由于模型的过度简化,在直角过渡位置或当载荷集中施加在某一点时,受力面趋近

于一条直线。由应力计算公式 $\sigma = \frac{F}{A}$ 可知,当外载力 F 一定而受力面积 A 无限趋近于零时,所得到的应力 σ 将趋于无穷大。应力奇异就是应力发散,不收敛于一个确定的值。而应力集中是应力收敛,收敛于一个确定的值。应力集中出现位置不一定是应力奇异,但应力奇异问题出现位置一定存在应力集中。



a) 几何模型



b) 应力云图

图 1 某储运装置及其应力奇异现象

Fig. 1 Storage and transportation device and its stress singularity phenomenon

2.2 应力奇异现象种类

应力奇异问题主要是由于边界条件设置、集中载荷施加、模型光顺程度以及材料的光顺性等因素所导致^[14]。应力奇异问题主要有结构几何突变应力奇异、约束刚度突变应力奇异、材料性能突变应力奇异。

结构几何突变应力奇异是指在结构设计时,某一区域的几何形状发生突变,结构的连续性和协调性被破坏,导致该区域的应力分布出现非连续性和显著增大的现象。这种应力奇异通常发生在如裂缝、尖端、几何连接处或其他几何形状突变部位,如图 2a 模型中的直角部位。

约束刚度突变应力奇异是指对结构施加边界条件(如固定端、支撑点)时,可能导致刚度矩阵局

部非对称或者含有零或接近零的元素,使局部应力、位移场表现出极端行为,包括约束部位、载荷施加方式等等,如图3所示。在进行有限元计算时,因为载荷施加方式导致的局部应力极端、位移场表现极端行为的应力奇异问题往往被仿真分析人员忽略。

材料性能突变应力奇异是指两种或多种材料以边界形式结合时,由于其物理性能上的差异导致的应力分布异常现象。这种差异来自材料的弹性模量、热膨胀系数、泊松比、剪切强度或应变率等特性,如图4所示。

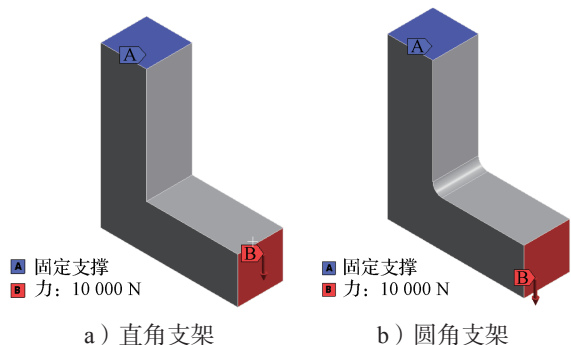


图2 结构几何突变应力奇异模型

Fig. 2 Stress singularity of structural geometry mutation

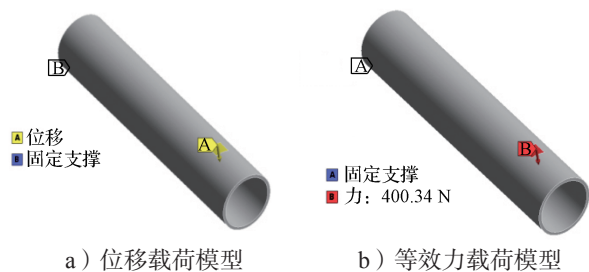


图3 约束刚度突变应力奇异模型

Fig. 3 Stress singularity of constraint stiffness mutation

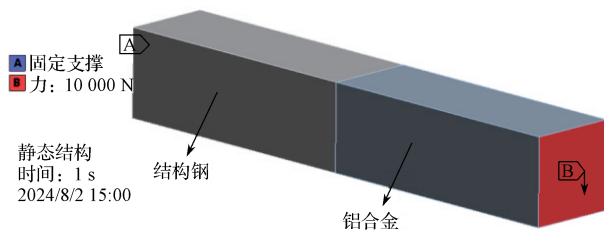


图4 材料性能突变应力奇异模型

Fig. 4 Stress singularity caused by material properties

3 结构几何突变应力奇异

3.1 模型建立

结构几何突变应力奇异通常发生在裂缝、尖端、

几何连接处或其他几何形状突变的部位。建立一个直角L型支架探究结构几何突变应力奇异问题,如图5所示。定义L型支架材料为结构钢,弹性模量 $E=2 \times 10^5$ MPa,泊松比 $\mu=0.3$ 。对受力面施加方向向下10 000 N的载荷,对支撑面施加固定约束。划分5种网格密度,分别为20, 15, 10, 5, 1 mm。

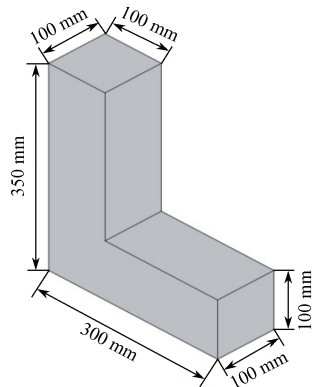


图5 直角L型支架结构几何模型

Fig. 5 Geometric structure model of right angle L-shaped bracket

3.2 求解结果分析

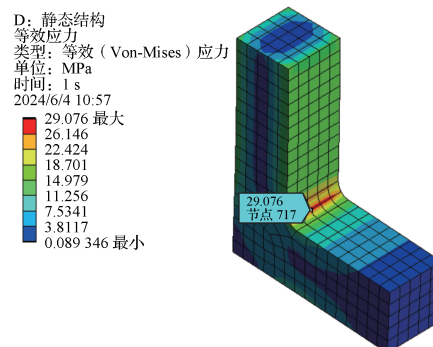
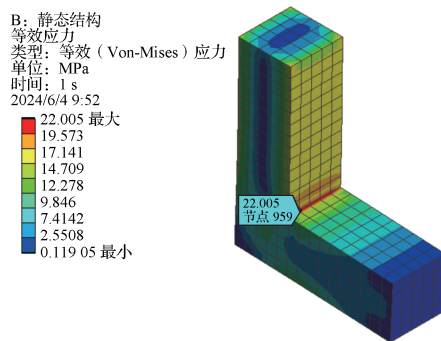
经静力学求解后,图6为5种网格尺寸下的应力云图,表1为5种网格尺寸下的最大应力及整体变形结果。由图6a和表1可知:随着网格的加密,直角模型计算的应力逐渐增大,最大变形的变化率保持在5%范围内,最大变形具有收敛性。最大应力出现的位置随着网格划分的加密不断靠近结构中的直角过渡位置(锐利的拐角位置),最大应力未完全覆盖两层网格,且增幅超过5%范围,应力出现了发散现象。实际结构不会出现这种变形收敛而应力发散的现象,说明这种现象是应力奇异所导致。

3.3 优化几何模型抑制应力奇异

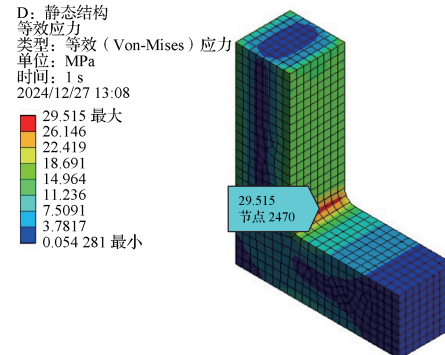
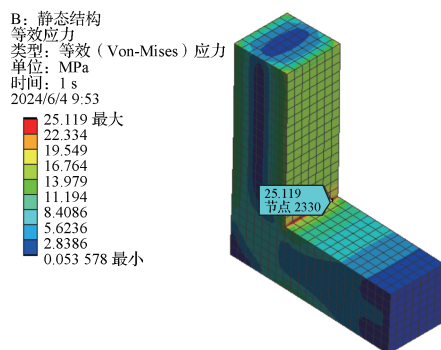
对于直角L型支架,应力奇异问题产生的主要原因是由直角结构导致。将直角L型支架应力奇异处模型进行优化,添加20 mm圆角过渡,改为圆角L型支架,如图2b所示。对圆角L型支架施加与直角L型支架同样的载荷及约束,按照同样的5种网格密度进行分析,结果如图6b及表1所示。由图6和表1可知:随着网格的加密,圆角模型最大应力收敛于29 MPa左右,最大变形收敛于0.16 mm左右。当网格尺寸为20 mm和15 mm时,由于网格尺寸较大,最大应力并未均匀覆盖两层网格;随着网格不断加密,最大应力能够均匀地覆盖两层网格;当网格划分尺寸为1 mm时,最大应力转移至固定约束部位,

圆角处应力收敛于 29.7 MPa。固定约束导致的应力奇异问题是由于在单元节点处形状方程不连续,使其

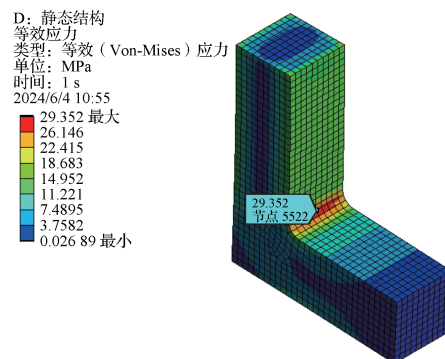
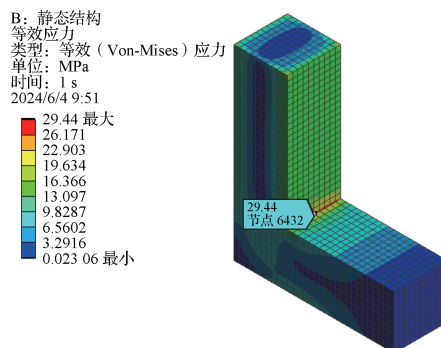
一阶微分存在奇异,进而导致不同单元内的应力/应变解不相同,在网格越密时越不容易收敛。



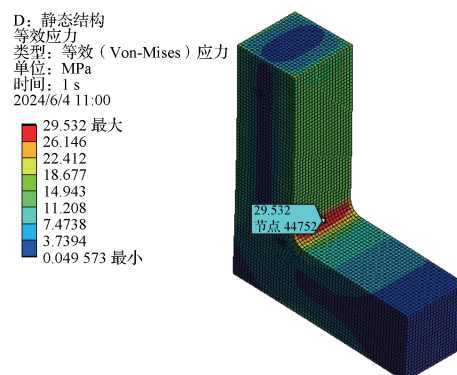
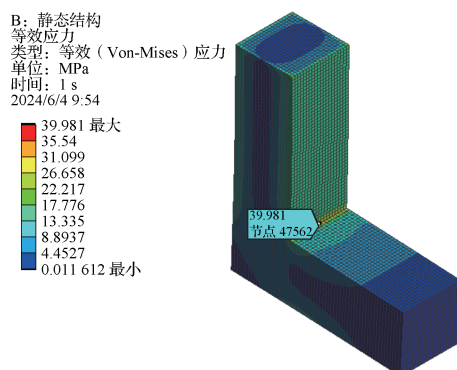
a) 20 mm 网格



b) 15 mm 网格



c) 10 mm 网格



d) 5 mm 网格

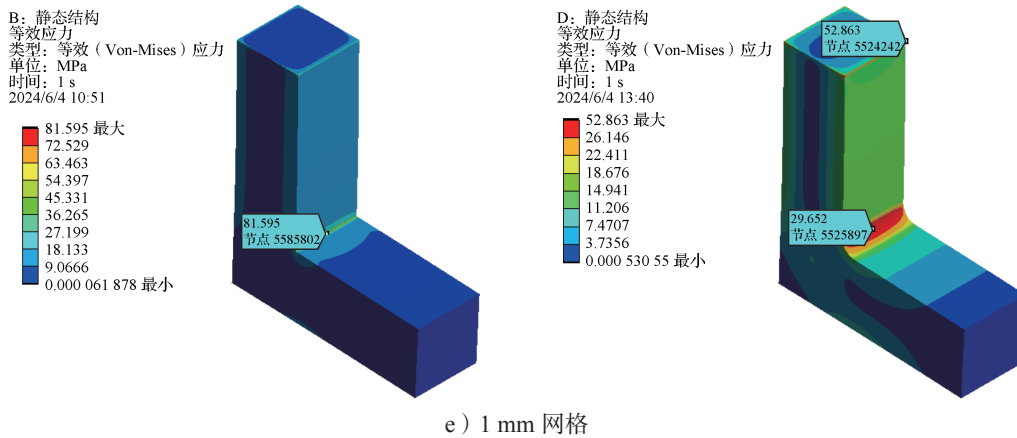


图 6 直角 L 型支架 (左) 与圆角 L 型支架 (右) 应力云图

Fig. 6 Stress nephogram of right angle L-shaped bracket (left) and rounded L-shaped bracket (right)

表 1 L 型支架最大应力和最大变形结果

Table 1 Maximum stress and maximum deformation for L-shaped bracket

直角 L 型支架					圆角 L 型支架				
网格尺寸 / mm	最大应力 / MPa	最大应力 变化率 /%	变形量 / mm	变形量 变化率 /%	网格尺寸 / mm	最大应力 / MPa	最大应力 变化率 /%	变形量 / mm	变形量 变化率 /%
20	22.0		0.165		20	29.1		0.161	
15	25.1	14.2	0.166	0.23	15	29.5	1.37	0.161	0.06
10	29.4	17.2	0.166	0.16	10	29.4	0.34	0.161	0.02
5	40.0	35.8	0.166	0.18	5	29.5	0.34	0.161	0.03
1	81.6	104.0	0.167	0.13	1	29.7	0.68	0.161	0.02

4 约束刚度突变应力奇异

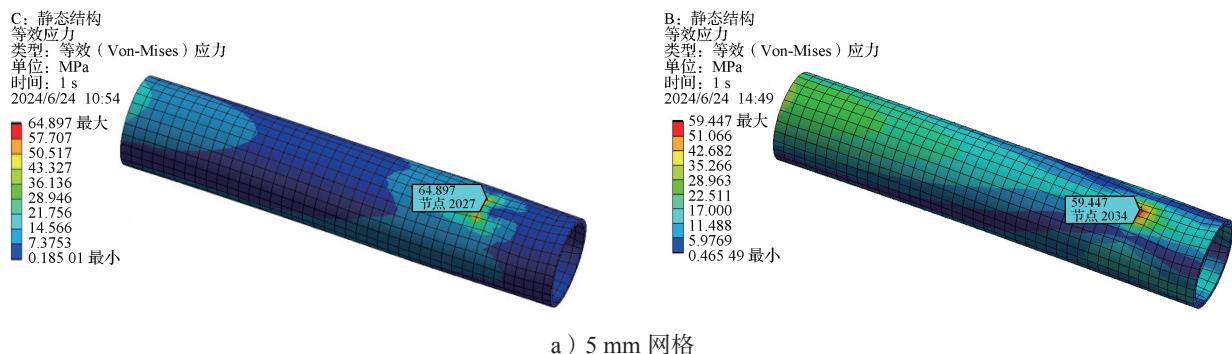
4.1 模型建立

在进行有限元计算时,因约束或载荷施加方式导致结构局部应力场出现极端行为的应力奇异问题往往被忽视。建立一个外径为 40 mm,壁厚为 2 mm 的圆柱型管状薄壁结构模型,并在结构一端添加印记面,如图 3 所示。定义圆柱型管状薄壁结构材料为结构钢,其弹性模量 $E=2 \times 10^5$ MPa,泊松比 $\mu=0.3$ 。在印记面处施加向下 0.05 mm 的位移载荷,对左端面

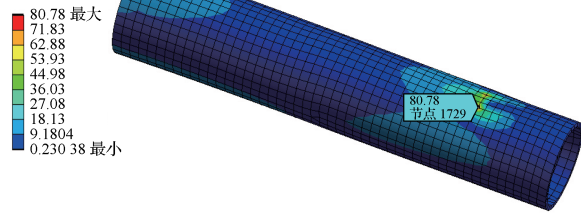
施加固定约束。划分 5 种网格密度,分别为 5, 4, 3, 2, 1 mm。

4.2 结果分析

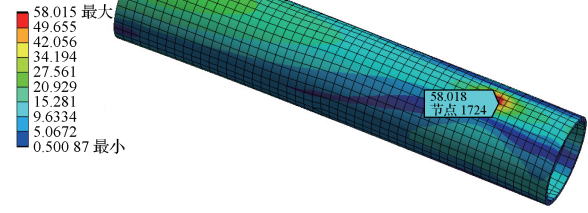
通过静力学求解后,得到 5 种网格尺寸下的模型应力云图和最大应力及整体变形结果,分别如图 7 和表 2 所示。由图 7 和表 2 可知:随着网格的加密,加载部位应力逐渐增大,最大形变的变化率在 5% 范围内;随着网格加密,最大应力位置不断靠近印记面边界位置,且最大应力区域未完全覆盖两层网格,增幅超过 5%,不具有收敛性,存在应力奇异问题。



E: 静态结构
等效应力
类型: 等效 (Von-Mises) 应力
单位: MPa
时间: 1 s
2024/6/24 10:58

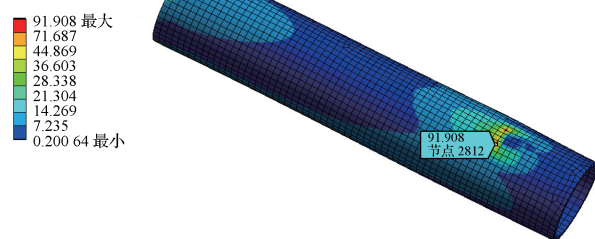


D: 副本静态结构
等效应力
类型: 等效 (Von-Mises) 应力
单位: MPa
时间: 1 s
2024/6/24 15:01

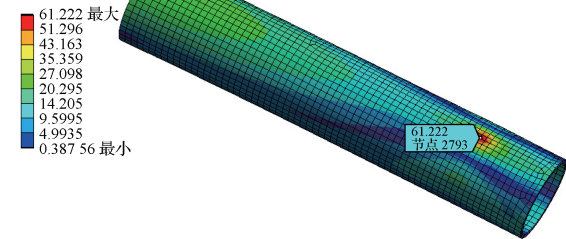


b) 4 mm 网格

G: 静态结构
等效应力
类型: 等效 (Von-Mises) 应力
单位: MPa
时间: 1 s
2024/6/24 11:01

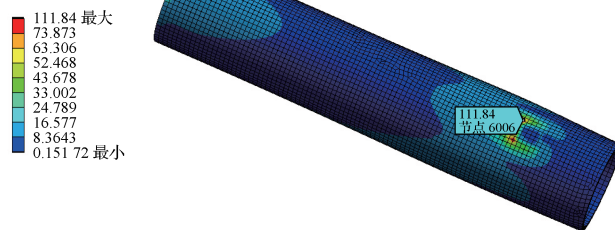


F: 副本静态结构
等效应力
类型: 等效 (Von-Mises) 应力
单位: MPa
时间: 1 s
2024/6/24 15:04

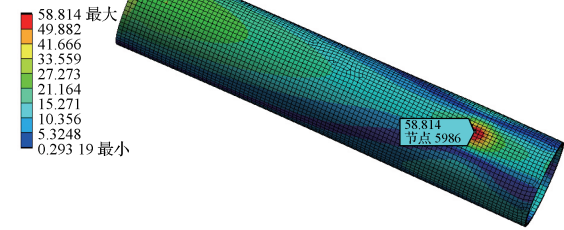


c) 3 mm 网格

I: 静态结构
等效应力
类型: 等效 (Von-Mises) 应力
单位: MPa
时间: 1 s
2024/6/24 11:02

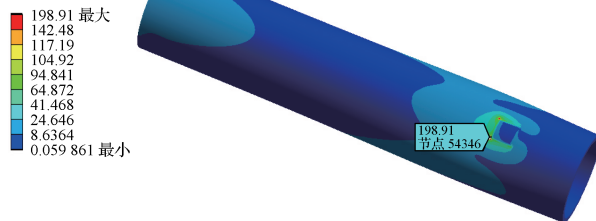


H: 副本静态结构
等效应力
类型: 等效 (Von-Mises) 应力
单位: MPa
时间: 1 s
2024/6/24 15:07

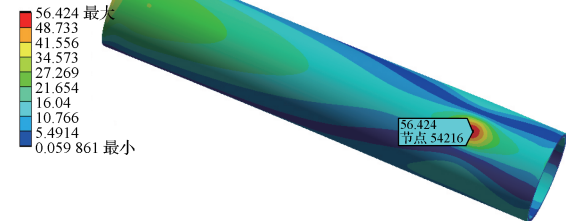


d) 2 mm 网格

K: 静态结构
等效应力
类型: 等效 (Von-Mises) 应力
单位: MPa
时间: 1 s
2024/6/24 11:04



J: 副本静态结构
等效应力
类型: 等效 (Von-Mises) 应力
单位: MPa
时间: 1 s
2024/6/24 15:23



e) 1 mm 网格

图 7 位移载荷 (左) 与力载荷 (右) 下圆柱型管状薄壁结构应力云图
Fig. 7 Stress nephogram of cylindrical tubular thin-walled structure under displacement load (left) and force load (right)

表 2 管状结构最大应力和最大变形结果

Table 2 Maximum stress and maximum deformation of tubular structures

位移载荷					力载荷				
网格尺寸 / mm	最大应力 / MPa	最大应力 变化率 /%	变形量 / mm	变形量 变化率 /%	网格尺寸 / mm	最大应力 / MPa	最大应力 变化率 /%	变形量 / mm	变形量 变化率 /%
5	64.9		0.052		5	59.4		0.107	
4	80.8	24.5	0.052	0.01	4	58.0	2.4	0.107	0.007
3	91.9	13.7	0.052	0.02	3	61.2	5.5	0.107	0.005
2	111.8	21.7	0.052	0.02	2	58.8	3.9	0.107	0.004
1	198.9	78.0	0.052	0.03	1	56.4	4.1	0.107	0.002

4.3 等效载荷抑制应力奇异

图 7 所示模型出现的应力奇异是由载荷的施加方式所导致。在印记面上施加统一的位移载荷, 相当于给该印记面施加了较大的刚度约束, 该印记面覆盖层材料与周围材料之间存在较大的刚度突变。因此考虑采用等效载荷法, 首先提取模型印记面处支反力, 大小为 400.34 N, 将该力载荷替换位移载荷施加在印记面上并求解。

等效力载荷的计算结果如图 7 和表 2 所示。图 7 和表 2 数据表明: 当网格加密到 2 mm 和 1 mm 时, 最大应力的波动在 5% 范围内, 最大应力能够均匀地覆盖两层网格以上, 最大应力收敛于 56.4 MPa; 最大变形收敛于 0.107 mm。可见, 载荷等效法能够有效抑制应力奇异问题。

5 材料性能突变应力奇异

5.1 分析模型建立

材料复合能够利用多种材料的性能优点, 复合材料结构在复合界面两侧的材料性能不同, 界面部位易产生缺陷。在外载荷的作用下, 复合材料结构产生的裂纹通常发生在界面处^[15]。多层复合材料性能的突变也会导致应力奇异问题。建立一个长 600 mm、宽 100 mm、高 100 mm 的两种材料复合简支梁模型, 如图 4 所示。其中左侧材料为结构钢, 弹性模量 $E=2 \times 10^5$ MPa, 泊松比 $\mu=0.30$; 右侧材料为铝合金, 弹性模量 $E=7.1 \times 10^4$ MPa, 泊松比 $\mu=0.33$ 。对左端面施加固定约束, 对右端面施加方向向下的载荷, 大小为 10 000 N。

5.2 应力求解结果

当网格尺寸为 1 mm 时, 复合材料模型的应力云图结果如图 8 和图 9 所示。由图 8 可知, 最大应力出现在固定约束边角处, 应力网格覆盖量不超过 3 格, 属于应力奇异现象。由图 9 可知, 在材料复合界面区

域, 结构钢处应力大小为 27.084 MPa, 铝合金处应力大小为 18.908 MPa, 两种材料交界处应力大小为 28.113 MPa, 且应力网格覆盖量不超过 3 格, 在交界处出现了应力奇异现象。材料复合部位的应力奇异, 本质上是由界面两侧出现的结构刚度突变所造成, 难以通过结构优化或载荷等效抑制, 可以通过实验测试与有限元技术相结合的方法进行研究。

B: 静态结构
等效应力
类型: 等效 (Von-Mises) 应力
单位: MPa

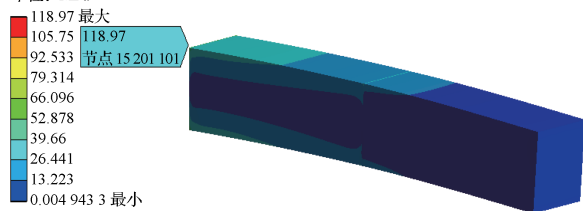


图 8 复合材料模型总体应力云图

Fig. 8 Stress nephogram of composite model

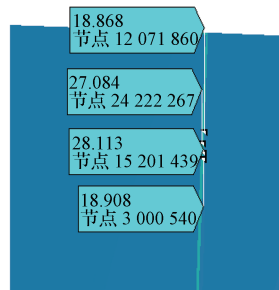


图 9 复合材料模型界面应力云图

Fig. 9 Interface stress nephogram of composite model

应力集中现象与应力奇异问题相伴且共生, 有限元分析时应力奇异处一定会有应力集中现象产生。消除应力奇异问题, 本质还是解决模型中的应力集中现象。由于求解过程中对模型的过度简化, 模型中的任何一处尖角位置都可能导致计算过程中出现应力奇异问题。因此, 计算过程中对模型结构进行合理简化尤为重要。此外, 在计算过程中根据零件或装

配体的实际工况，合理添加约束和载荷也是避免应力奇异问题出现的重要方法。通常在静力学分析中，固定约束位置易出现应力奇异问题，因此需要工程人员对应力奇异位置进行合理评估，谨慎使用固定约束，或使用等效约束法代替固定约束。以圆角 L 型支架为例，将圆角 L 型支架固定约束方式进行修改，把对圆角 L 型支架的固定面施加固定约束改成对固定面施加远程位移，将所有位移量均设置为 0，即视为固定约束，状态设置为可变形（柔性），详细信息如图 10 所示。修改后进行计算，最大应力计算结果为 29.684 MPa，最大应力变化率为 0.24%，应力奇异问题消失，如图 11 所示。

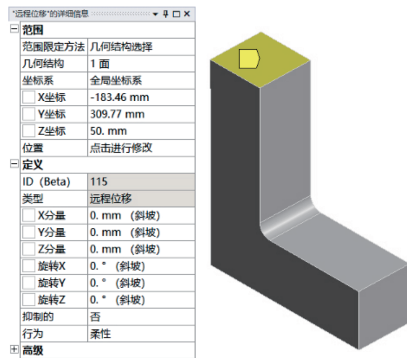


图 10 模型远程位移参数信息

Fig. 10 Model remote displacement parameter information

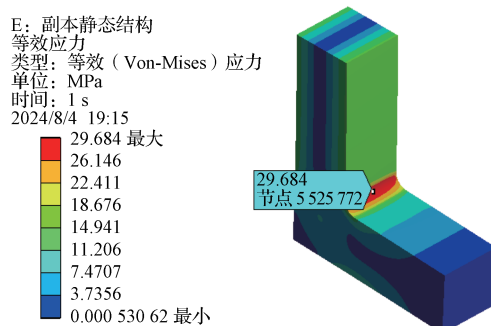


图 11 模型约束优化应力云图

Fig. 11 Model constrained optimization stress nephogram

6 结论

应力奇异问题容易干扰对计算结果的正确分析，影响对结构强度及疲劳寿命分析的准确性。通过上述研究可得以下结论：

1) 应力集中与应力奇异存在本质区别，应力集中现象存在于现实的结构当中，而应力奇异问题只存

在于数值计算过程中；应力集中出现位置不一定是应力奇异，但应力奇异问题出现位置一定存在应力集中。在有限元计算过程中，应力集中解会随着网格划分的逐渐细化而收敛于某个值，而应力奇异解会随着网格划分的逐渐细化而发散。

2) 应力奇异问题本质上是结构刚度突变所造成，因此抑制应力奇异问题的方法主要有改进模型局部几何结构、改进载荷施加方式或约束方式。在有限元计算过程中，当出现应力奇异问题时，要检查结构是否合理，网格划分是否精细，并要对模型的边界条件、外载荷施加方式、固定部位的合理性和结构特征进行检查。

参考文献:

- [1] 徐 丽, 高 嵩, BARLTROP N. 存在奇异点的结构疲劳评估简单方法 [J]. 船舶工程, 2013, 35(6): 9-14.
- [2] KHECHAI A, TATI A, GUETTALA A. Finite Element Analysis of Stress Concentrations and Failure Criteria in Composite Plates with Circular Holes[J]. Frontiers of Mechanical Engineering, 2014, 9(3): 281-294.
- [3] AREZOODAR A F, BALADI A. The Effects of Materials Properties & Angle Junction on Stress Concentration at Interface of Dissimilar Materials[J]. Advanced Materials Research, 2011, 383/384/385/386/387/388/389/390: 887-892.
- [4] FEDOROV A Y, GALKINA E B. Experimental Study of the Effectiveness of Stress Reduction near V-Shaped Notch Filled with a Certain Material[J]. Procedia Structural Integrity, 2023, 50: 83-90.
- [5] VAN LICH L, VAN TRUONG D. Plastic Stress Singularity near Interface Edge of Elasto-Plastic/Elastic Bi-Material[J]. Computational Materials Science, 2013, 78: 140-146.
- [6] 张 进, 吴 健, 王纬波, 等. 45 钢椭圆孔板应力集中的应变率效应 [J]. 机械强度, 2020, 42(3): 694-699.
- [7] 温广军, 李翻翻, 赵华宏, 等. 矩形桩数值解应力奇异问题分析方法 [J]. 土工基础, 2021, 35(4): 495-499.
- [8] 刘三勇, 黄才英. SolidWorks Simulation 有限元分析中应力奇异问题的研究 [J]. 现代制造技术与装备, 2020, 56(6): 69-72.
- [9] 解 胜. 双材料管类零件界面端应力奇异性研究 [D]. 合肥: 合肥工业大学, 2017.
- [10] 唐建平. 复合材料界面应力分析 [D]. 长沙: 湖南大学,

- 2019.
- [11] 吴志学. 无应力奇异性条件下的界面应力集中问题研究 [J]. 工程力学, 2010, 27(2): 54–58.
- [12] 王 鑫, 戚其松. 有限元分析中应力奇异问题的处理 [J]. 机械工程与自动化, 2014(3): 61–63.
- [13] 高思远, 赵旭东, 李卫民, 等. 面向工程应用的应力集中与应力奇异现象的有限元研究 [J]. 辽宁工业大学学报 (自然科学版), 2021, 41(5): 281–287.
- [14] 周 炬, 苏金英. ANSYS Workbench 有限元分析实例详解: 静力学 [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2017: 23–28.
- [15] 江海涛, 李 欢, 杨文彩. 基于扩展二相杂交应力有限元法的两相材料界面裂纹断裂力学分析 [J]. 科学技术与工程, 2023, 23(35): 14923–14936.
- (责任编辑: 邓光辉)

Stress Singularity and Suppression Methods in Finite Element Analysis of Engineering Structures

HUANG Zhencheng¹, LIN Yibin², LEI Zhiyong¹, HUA Guangjun³

(1. Technical Center, Shenzhen Guanwei Technology Co., Ltd., Shenzhen Guangdong 518110, China;

2. College of Materials and Advanced Manufacturing, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China

3. College of Packaging and Materials Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

Abstract: The stress singularity phenomenon generated by finite element analysis of engineering structures was studied, and the stress singularity suppression method was proposed. The stress singularities could be divided into geometric catastrophe stress singularity, load catastrophe stress singularity and material catastrophe stress singularity. Using ANSYS Workbench simulation platform, three typical stress singular models were established respectively, and the numerical simulation analysis was carried out. The analysis results show that the essence of the stress singularity phenomenon in the finite element analysis process is caused by structural stiffness mutation, and the stress singularity can be suppressed by modifying the model and applying the equivalent constraint.

Keywords: finite element analysis; stress concentration; stress singularity; constraint stiffness mutation