

双曲正切非线性系统跌落冲击响应分析的一种近似解析法

doi:10.3969/j.issn.1674-7100.2019.03.012

赵晓兵¹ 杜兴丹²

陈安军^{2,3}

1. 无锡市计量测试院

江苏 无锡 214101

2. 江南大学

机械工程学院

江苏 无锡 214122

3. 江南大学

国家轻工业包装制品质量

监督检测中心

江苏 无锡 214122

摘要: 针对典型双曲正切缓冲包装系统, 跌落冲击条件下讨论系统近似解析解。将系统简化为三次-五次非线性系统, 引入无量纲参数推导无量纲动力学方程, 应用牛顿谐波平衡法获得系统响应一阶、二阶、三阶近似解析解。算例分析表明, 牛顿谐波平衡法获得的三阶近似解与龙格-库塔法的数值解最为接近, 位移响应最大值、加速度响应最大值以及跌落冲击时间的相对误差控制在1%以内。为双曲正切型非线性系统跌落冲击响应分析提供了一种新的近似分析方法。

关键词: 双曲正切型非线性系统; 牛顿谐波平衡法; 近似解; 位移最大值; 加速度最大值; 跌落冲击时间

中图分类号: TB485.3; TB487

文献标志码: A

文章编号: 1674-7100(2019)03-0082-06

引文格式: 赵晓兵, 杜兴丹, 陈安军. 双曲正切非线性系统跌落冲击响应分析的一种近似解析法 [J]. 包装学报, 2019, 11(3): 82-87.

0 引言

包装动力学分析涉及典型非线性问题, 如三次非线性、正切非线性以及双曲正切非线性等。针对非线性缓冲系统跌落冲击动力学响应分析, 可以使用数值分析方法获得数值解, 也可通过近似分析获得解析解。近年来, 非线性系统跌落冲击动力学响应的近似分析采用变分迭代法^[1-4]、何氏参数展开法^[5-7]、何氏频率-振幅关系^[8]、同伦摄动法^[9]等。研究结果表明, 以上近似分析方法直接应用时, 系统响应位移最大值或加速度最大值或跌落冲击时间可能出现较大误差。为获得满意的精度, 对保守系统跌落冲击响应分析可用能量法进行校正^[4-9], 但在一定程度上使得跌落冲击响应分析过程复杂化。

针对非线性保守系统振动响应分析, 文献[10-14]将牛顿线性化方法和谐波平衡法相结合, 提出一种新的非线性问题解析分析方法——牛顿谐波平衡法(Newton-harmonic balancing approach, NHB)。该法不仅能避免求解复杂的非线性代数方程组, 而且不依赖于小参数, 因而对强非线性振动分析可获得满意精度。由于跌落冲击问题与一般振动问题的初始条件不同, 杜兴丹等^[15]改进了NHB法, 并将其应用于三次非线性缓冲系统跌落冲击动力学分析中, 获得系统响应一阶、二阶近似解析解, 算例分析表明二阶近似解的精度满足工程需求。为进一步验证NHB法对其它典型非线性系统跌落冲击动力学分析的有效性, 本文将HNB法应用于双曲正切型缓冲包装系统中, 分析跌落冲击条件下系统响应, 获得一种近似解析解。

收稿日期: 2019-04-19

作者简介: 赵晓兵(1971-), 男, 江苏无锡人, 无锡市计量测试院高级工程师, 主要从事非线性系统动态特性分析方面的研究, E-mail: zxb@wxmtc.com

通信作者: 陈安军(1962-), 男, 河南潢川人, 江南大学教授, 硕士生导师, 主要从事包装动力学, 机械系统动态性能分析方面的研究, E-mail: caj62@126.com

1 动力学方程

无阻尼条件下, 单自由度双曲正切缓冲包装系统跌落冲击动力学方程及初始条件如下:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + F_0 \tanh \frac{k_0 x}{F_0} = 0, \quad (1)$$

$$x(0)=0, \quad \frac{dx}{dt}(0)=\sqrt{2gh}。 \quad (2)$$

式(1)~(2)中: m 、 x 分别为产品质量及位移;

k_0 、 F_0 分别为缓冲材料初始弹性系数及恢复力极限值;

g 为重力加速度;

h 为跌落高度。

引入系统参数 $L=F_0/k_0$, 频率参数 $\omega=\sqrt{k_0/m}$, 周期参数 $T=1/\omega$, 无量纲位移参数 $y=x/L$, 无量纲时间参数 $\tau=t/T$, 经推导系统无量纲动力学方程为

$$y'' + \tanh y = 0, \quad (3)$$

式中, 上标 “'” 表示 y 对无量纲时间 τ 求导。

式(3)中非线性项引入泰勒级数展开, 近似无量纲动力学方程及初始条件分别为:

$$y'' + ay + by^3 + cy^5 = 0, \quad (4)$$

$$y(0)=0, \quad y'(0)=V = \sqrt{2ghmk_0}/F_0。 \quad (5)$$

式(4)~(5)中: $a=1$;

$b=-1/3$;

$c=2/15$;

V 为无量纲跌落冲击初始速度。

2 跌落冲击响应近似解

引入新的参数 $\tau_1=\omega\tau$, 动力学方程变为

$$\omega^2 \frac{d^2 y}{d\tau_1^2} + ay + by^3 + cy^5 = 0。 \quad (6)$$

记 $\omega^2=\Omega$, 一阶近似解频率 $\omega_1^2=\Omega_1$, $\Delta\omega_1^2=\Delta\Omega_1$, 用牛顿线性化方法表示位移和频率参数, 即

$$y=y_1+\Delta y_1, \quad (7)$$

$$\Omega=\Omega_1+\Delta\Omega_1。 \quad (8)$$

将式(7)和式(8)代入式(6)中, 不计高阶无穷小量, 则有

$$\begin{aligned} (\Omega_1+\Delta\Omega_1) \frac{d^2 y_1}{d\tau_1^2} + \Omega_1 \frac{d^2 \Delta y_1}{d\tau_1^2} + ay_1 + by_1^3 + \\ cy_1^5 + (a+3by_1^2+5cy_1^4) \Delta y_1 = 0。 \end{aligned} \quad (9)$$

满足初始条件(5)的初始逼近解为

$$y_1=A\sin\tau_1。 \quad (10)$$

将式(10)代入式(9)中, 整理得

$$\begin{aligned} [(-\Omega_1-\Delta\Omega_1+a)A+3bA^3/4+5cA^5/8]\sin\tau_1 - \\ (bA^3/4+5cA^5/16)\sin 3\tau_1 + (cA^5/16)\sin 5\tau_1 + \Omega_1 \frac{d^2 \Delta y_1}{d\tau_1^2} + \\ (a+3bA^2\sin^2\tau_1+5cA^4\sin^4\tau_1)\Delta y_1 = 0。 \end{aligned} \quad (11)$$

为获得一阶近似解, 令

$$\Delta y_1=0, \quad \Delta\Omega_1=0。 \quad (12)$$

再令式(11)中 $\sin\tau_1$ 的系数为 0, 即

$$(-\Omega_1+a)A+3bA^3/4+5cA^5/8=0。 \quad (13)$$

则一阶近似解为

$$\omega_1=\sqrt{\Omega_1}=\sqrt{a+3bA^2/4+5cA^4/8}, \quad (14)$$

$$y_1=A\sin\left(\sqrt{a+3bA^2/4+5cA^4/8}\tau_1\right)。 \quad (15)$$

为获得二阶近似解, 位移增量设为

$$\Delta y_1=c_1(\sin\tau_1-\sin 3\tau_1/3), \quad (16)$$

式中 c_1 为待定常数。

将式(16)代入式(11)中, 整理后令 $\sin\tau_1$ 及 $\sin 3\tau_1$ 的系数为零, 得

$$c_1=\frac{3(4bA^3+5cA^5)}{128a+48bA^2-15cA^4}, \quad (17)$$

$$\Delta\Omega_1=(9bA/4+145cA^3/48)c_1。 \quad (18)$$

二阶近似解为

$$\begin{aligned} \omega_2=\sqrt{\Omega_2}=\sqrt{\Omega_1+\Delta\Omega_1}= \\ \sqrt{a+3bA^2/4+5cA^4/8+(9bA/4+145cA^3/48)c_1}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$y_2(\tau)=(A+c_1)\sin(\omega_2\tau)-c_1\sin(3\omega_2\tau)/3。 \quad (20)$$

无量纲速度及加速度分别为

$$y_2'=(A+c_1)\omega_2\cos(\omega_2\tau)-c_1\omega_2\cos(3\omega_2\tau), \quad (21)$$

$$y_2''=-(A+c_1)\omega_2^2\sin(\omega_2\tau)+3c_1\omega_2^2\sin(3\omega_2\tau)。 \quad (22)$$

当 $\omega_2\tau=\pi/2$ 时, 由式(20)和式(22)得, 无量纲位移、加速度最大值分别为

$$y_{2\max}=|A+4c_1/3|, \quad (23)$$

$$y_{2\max}''=|(A+4c_1)\omega_2^2|; \quad (24)$$

跌落冲击持续时间为

$$t=\pi/\omega_2。 \quad (25)$$

由初始条件(5)及式(19)(21), 有

$$A\sqrt{a+3bA^2/4+5cA^4/8+(9bA/4+145cA^3/48)c_1}=V。 \quad (26)$$

将式(17)代入式(26)中,未知参数 A 通过式(26)确定。

为了获得三阶的解析解,满足初始条件的位移增量为

$$\Delta y_2 = c_2(\sin \tau - \sin 3\tau/3) + c_3(\sin 3\tau/3 - \sin 5\tau/5)。 \quad (27)$$

将 y_2 、 Δy_2 、 Ω_2 、 $\Delta \Omega_2$ 分别代替式(9)中的 y_1 、 Δy_1 、 Ω_1 、 $\Delta \Omega_1$,则有

$$(\Omega_2 + \Delta \Omega_2) \frac{d^2 y_2}{d\tau_1^2} + \Omega_2 \frac{d^2 \Delta y_2}{d\tau_1^2} + ay_2 + by_2^3 + cy_2^5 + (a + 3by_2^2 + 5cy_2^4)\Delta y_2 = 0。 \quad (28)$$

将式(19)(20)(27)代入式(28)中,整理后令 $\sin \tau$ 、 $\sin 3\tau$ 、 $\sin 5\tau$ 的系数为零,得到关于 c_2 、 c_3 、 $\Delta \Omega_2$ 的方程组:

$$p_1 + p_2 c_2 + p_3 c_3 + p_4 \Delta \Omega_2 = 0, \quad (29)$$

$$p_5 + p_6 c_2 + p_7 c_3 + p_8 \Delta \Omega_2 = 0, \quad (30)$$

$$p_9 + p_{10} c_2 + p_{11} c_3 = 0。 \quad (31)$$

式(29)~(31)中:

$$p_1 = -\Omega_2(A + c_1) + a(A + c_1) + b\left(3/4(A + c_1)^3 + 1/4(A + c_1)^2 c_1 + 1/6(A + c_1) c_1^2\right) + c\left(5/8(A + c_1)^5 + 5c_1/8(A + c_1)^4 + 5c_1^3/72(A + c_1)^2 + 5c_1^2/12(A + c_1)^3 + 15c_1^4/648(A + c_1)\right);$$

$$p_2 = -\Omega_2 + a + 3b\left(3/4(A + c_1)^2 + 1/6(A + c_1) c_1 + 1/12(A + c_1)^2 + c_1^2/18 + 1/9(A + c_1) c_1\right) + 5c\left(5/8(A + c_1)^4 + 5/16\left(4c_1/3(A + c_1)^3 + 1/3(A + c_1)^4\right) + 3/8\left(2c_1^2/3(A + c_1)^2 + 4c_1/9(A + c_1)^3\right) + 3/16\left(4c_1^3/27(A + c_1) + 2c_1^2/9(A + c_1)^2\right) + 3/8\left(c_1^4/81 + 4c_1^3/81(A + c_1)\right)\right);$$

$$p_3 = 3b\left(-1/12(A + c_1)^2 - 1/9(A + c_1) c_1 - 1/30(A + c_1) c_1 - c_1^2/180\right) + 5c\left(-5/48(A + c_1)^4 - c_1/6(A + c_1)^3 - c_1^3/54(A + c_1) - 1/80(A + c_1)^4 - c_1/15(A + c_1)^3 - c_1^2/40(A + c_1) - c_1^3/180(A + c_1) - c_1^4/1620\right);$$

$$p_4 = -(A + c_1);$$

$$p_5 = 3c_1 \Omega_2 - ac_1/3 + b\left(-1/4(A + c_1)^3 - 1/2(A + c_1)^2 c_1 - 1/36c_1^3\right) + c\left(-5/16(A + c_1)^5 - 5c_1^3/36(A + c_1)^2 - 5c_1^5/1944 - 5c_1/8(A + c_1)^4\right);$$

$$p_6 = 3\Omega_2 - a/3 + 3b\left(-1/4(A + c_1)^2 - 1/3(A + c_1) c_1 - 1/6(A + c_1)^2 - 1/36c_1^2\right) + 5c\left(-5/16(A + c_1)^4 - 3/8\left(4c_1/3(A + c_1)^3 + 1/3(A + c_1)^4\right) - 3/16\left(2c_1^2/3(A + c_1)^2 + 4c_1/9(A + c_1)^3\right) - 3/8\left(4c_1^3/27(A + c_1) + 2c_1^2/9(A + c_1)^2\right) - 5c_1^4/1944\right);$$

$$p_7 = -3\Omega_2 + a/3 + 3b\left(1/6(A + c_1)^2 + 1/36c_1^3 + 1/20(A + c_1)^2 + 1/30(A + c_1) c_1\right) + 5c\left(1/8(A + c_1)^4 + c_1/12(A + c_1)^3 + c_1^2/12(A + c_1) + 5c_1^4/1944 + 1/20(A + c_1)^4\right) + c_1/20(A + c_1)^3 + c_1^2/40(A + c_1)^2 + c_1^3/135(A + c_1);$$

$$p_8 = 3c_1;$$

$$p_9 = b\left(1/4(A + c_1)^2 c_1 + 1/12(A + c_1) c_1^2\right) + c\left(1/16(A + c_1)^5 + 5c_1/12(A + c_1)^4 + 5c_1^3/72(A + c_1)^2 + 5c_1^2/24(A + c_1)^3 + 5c_1^4/324(A + c_1)\right);$$

$$p_{10} = 3b\left(1/6(A + c_1) c_1 + 1/12(A + c_1)^2 + 1/36c_1^2 + 1/18(A + c_1) c_1\right) + 5c\left(1/16(A + c_1)^4 + 1/4\left(4c_1/3(A + c_1)^3 + 1/3(A + c_1)^4\right) + 3/16\left(2c_1^2/3(A + c_1)^2 + 4c_1/9(A + c_1)^3\right) + 3/16\left(4c_1^3/27(A + c_1) + 2c_1^2/9(A + c_1)^2\right) + 1/4\left(c_1^4/81 + 4c_1^3/81(A + c_1)\right)\right);$$

$$p_{11} = 5\Omega_2 - a/5 + 3b\left(-1/12(A + c_1)^2 - 1/18(A + c_1) c_1 - 1/10(A + c_1)^2 - 1/90c_1^2\right) + 5c\left(-1/12(A + c_1)^4 - c_1/12(A + c_1)^3 - c_1^2/24(A + c_1)^2 - c_1^3/81(A + c_1) - 3/40(A + c_1)^4 - c_1/30(A + c_1)^3 - c_1^2/30(A + c_1)^2 - c_1^3/540(A + c_1) - 3c_1^4/3240(A + c_1)\right)。$$

联立方程组(29)~(31),得:

$$\Delta\Omega_2 = \frac{p_3(p_5p_{10}-p_6p_9)+p_2(p_7p_9-p_5p_{11})+p_1(p_6p_{11}-p_7p_{10})}{p_8(p_2p_{11}-p_3p_{10})+p_4(p_7p_{10}-p_6p_{11})}; \quad (32)$$

$$c_2 = \frac{p_8(p_3p_9-p_1p_{11})+p_4(p_5p_{11}-p_7p_9)}{p_8(p_2p_{11}-p_3p_{10})+p_4(p_7p_{10}-p_6p_{11})}; \quad (33)$$

$$c_3 = \frac{p_8(p_1p_{10}-p_2p_9)+p_4(p_6p_9-p_5p_{10})}{p_8(p_2p_{11}-p_3p_{10})+p_4(p_7p_{10}-p_6p_{11})}。 \quad (34)$$

则三阶近似解为

$$\omega_3 = \sqrt{\Omega_3} = \sqrt{\Omega_2 + \Delta\Omega_2}; \quad (35)$$

$$y_3 = (A + c_1 + c_2) \sin(\omega_3 t) - (c_1 + c_2 - c_3) \times \sin(3\omega_3 t) / 3 - c_3 \sin(5\omega_3 t) / 5。 \quad (36)$$

无量纲速度和加速度解析表达分别为:

$$y'_3 = (A + c_1 + c_2) \omega_3 \cos(\omega_3 t) - (c_1 + c_2 - c_3) \times \omega_3 \cos(3\omega_3 t) - c_3 \omega_3 \cos(5\omega_3 t); \quad (37)$$

$$y''_3 = -(A + c_1 + c_2) \omega_3^2 \sin(\omega_3 t) + 3\omega_3^2 (c_1 + c_2 - c_3) \times \sin(3\omega_3 t) + 5\omega_3^2 c_3 \sin(5\omega_3 t)。 \quad (38)$$

当 $\omega_3 t = \pi/2$ 时, 无量纲位移和加速度的最大值分别为

$$y_{3\max} = |A + 4c_1/3 + 4c_2/3 - 8c_3/15|, \quad (39)$$

$$y''_{3\max} = |-A - 4c_1 - 4c_2 + 8c_3| \omega_3^2; \quad (40)$$

跌落冲击持续时间为

$$t = \pi/3。 \quad (41)$$

未知参数 A 可联立无量纲初始条件 (5) 以及式 (35) (37) 确定。

3 算例分析

为验证近似解的有效性, 取无量纲跌落冲击速度 $V=1.0$, 分别利用四阶龙格-库塔 (Runge-Kutta, R-K) 法、NHB 法获得跌落冲击时间内系统无量纲位移、加速度响应, 如图 1 和 2 所示。图中, R-K 表示龙格-库塔法的数值解, NHBF、NHBS、NHBT 分别表示 NHB 一阶、二阶、三阶结果。无量纲跌落冲击速度分别取 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2 时, 通过 R-K 法、NHB 法获得的无量纲最大位移、最大加速度、跌落冲击持续时间如表 1~3 所示。表中, 相对误差为 NHBF、NHBS、NHBT 分别与 R-K 法比较的相对误差。

图 1, 2 和表 1~3 可知: 在跌落冲击时间内, NHB 法获得的无量纲位移及加速度响应的三阶近似解与四阶龙格-库塔法的数值分析结果最为接近;

NHB 法获得的无量纲位移响应最大值、跌落冲击持续时间的二阶近似解的相对误差在 1% 之内, 无量纲加速度响应最大值的相对误差在 3% 以内, 且该相对误差随无量纲跌落冲击速度的增加而增大, 这表明非线性系统响应对初始条件敏感; NHB 法获得的无量纲位移响应最大值、无量纲加速度响应最大值以及跌落冲击持续时间的三阶近似解的相对误差均控制在 1% 以内, NHB 法的三阶近似解优于一阶、二阶的近似解。

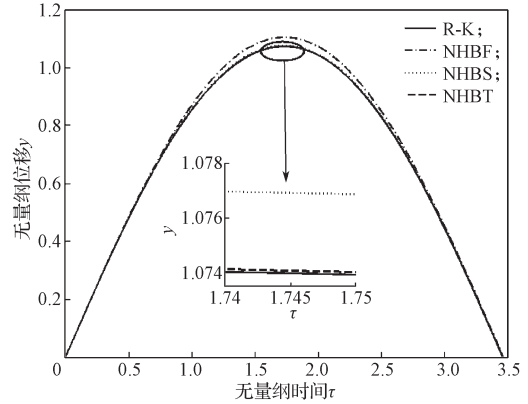


图 1 无量纲位移响应

Fig. 1 Dimensionless displacement response

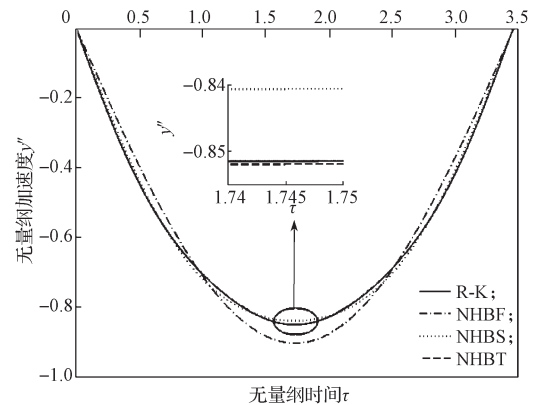


图 2 无量纲加速度响应

Fig. 2 Dimensionless acceleration response

表 1 无量纲位移响应最大值比较

Table 1 Comparison of the dimensionless maximum displacement

V	无量纲位移				相对误差 /%		
	R-K	NHBF	NHBS	NHBT	NHBF	NHBS	NHBT
0.2	0.200 7	0.201 0	0.200 7	0.200 7	0.15	0	0
0.4	0.405 3	0.408 1	0.405 4	0.405 3	0.69	0.02	0
0.6	0.617 9	0.627 4	0.618 1	0.617 9	1.54	0.03	0
0.8	0.841 2	0.862 6	0.842 1	0.841 3	2.54	0.11	0.01
1.0	1.074 0	1.105 0	1.077 0	1.074 1	2.89	0.28	0.01
1.2	1.305 4	1.326 7	1.312 4	1.305 5	1.63	0.54	0.01

表2 无量纲加速度响应最大值比较

Table 2 Comparison of dimensionless maximum acceleration

V	无量纲加速度				相对误差 /%		
	R-K	NHBF	NHBS	NHBT	NHBF	NHBS	NHBT
0.2	0.198 0	0.199 0	0.198 0	0.198 0	0.51	0	0
0.4	0.384 6	0.392 1	0.384 5	0.384 6	1.95	0.03	0
0.6	0.551 3	0.573 8	0.550 5	0.551 3	4.08	0.15	0
0.8	0.699 0	0.741 9	0.695 4	0.699 1	6.14	0.52	0.01
1.0	0.851 6	0.905 0	0.840 8	0.852 1	6.27	1.27	0.06
1.2	1.069 3	1.085 4	1.045 6	1.069 6	1.51	2.22	0.03

表3 无量纲跌落冲击持续时间比较

Table 3 Comparison of dropping shock duration

V	无量纲跌落冲击持续时间				相对误差 /%		
	R-K	NHBF	NHBS	NHBT	NHBF	NHBS	NHBT
0.2	3.157 3	3.157 4	3.157 3	3.157 3	0	0	0
0.4	3.204 5	3.205 2	3.204 5	3.204 5	0.02	0	0
0.6	3.281 7	3.285 2	3.281 8	3.281 7	0.11	0	0
0.8	3.379 4	3.387 4	3.379 9	3.379 4	0.24	0.01	0
1.0	3.465 4	3.471 5	3.466 8	3.465 4	0.18	0.04	0
1.2	3.478 3	3.473 3	3.477 1	3.478 4	0.14	0.03	0

4 结论

1) 牛顿谐波平衡法对双曲正切非线性缓冲系统跌落冲击动力学响应分析有效, 可以获得系统位移响应、加速度响应的近似解析表达, 且其分析过程相对简单。

2) 系统跌落冲击破损评价关注的位移响应最大值、加速度响应最大值等重要参数获得解析表达, 有利于跌落破损评价。

3) 与近似动力学方程的四阶龙格-库塔法的数值分析结果比较, 系统位移响应、加速度响应最大值以及跌落冲击时间等的二阶、三阶近似解精度均可满足要求, 但三阶近似解分析过程相对复杂。

参考文献:

- [1] SONG S, DUAN N N, CHEN A J. Application of Variational Iteration Method for Dropping Damage Evaluation of the Suspension Spring Packaging System[J]. Abstract and Applied Analysis, 2014, 2014: 1-7.
- [2] 宋爽, 陈安军. 基于变分迭代法的悬挂式弹簧系统的跌落破损评价[J]. 包装工程, 2013, 34(13): 36-39, 46.
SONG Shuang, CHEN Anjun. Dropping Damage Evaluation of Suspension Spring System Based on Variational Iteration Method[J]. Packaging Engineering, 2013, 34(13): 36-39, 46.
- [3] 李文君, 陈安军. EPE缓冲系统跌落冲击响应分析的变分迭代法[J]. 包装工程, 2015, 36(11): 79-82.
LI Wenjun, CHEN Anjun. Variational Iteration Method for Analysis of Dropping Shock Response of EPE Cushion System[J]. Packaging Engineering, 2015, 36(11): 79-82.
- [4] CHEN A J. Application of Variational Iteration Method with Energy Method for Nonlinear Equation Arisen from Packaging System[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2013, 2013: 1-5.
- [5] 李皓婧, 张敏. 双曲正切型非线性包装系统跌落冲击响应分析[J]. 包装工程, 2016, 37(23): 116-119.
LI Haojing, ZHANG Min. Dropping Shock Response of Hyperbolic Tangent Nonlinear Packaging System[J]. Packaging Engineering, 2016, 37(23): 116-119.
- [6] 宋浩, 李宏卫. 正切型非线性包装系统跌落冲击响应分析的何氏 PEM 与修正[J]. 包装工程, 2016, 37(1): 11-14.
SONG Hao, LI Hongwei. Correction of He's Parameter-Expanding Method for Analyzing Dropping Shock Response of Tangent Nonlinear Packaging System[J]. Packaging Engineering, 2016, 37(1): 11-14.
- [7] 李宏卫, 王军. 三次型非线性包装系统跌落冲击响应分析[J]. 包装工程, 2015, 36(19): 18-22.
LI Hongwei, WANG Jun. Dropping Shock Response Analysis of a Cubic Nonlinear Packaging System[J]. Packaging Engineering, 2015, 36(19): 18-22.
- [8] 陈鸣, 陈安军. 非线性包装系统跌落冲击响应分析的 HFAF 法[J]. 包装工程, 2014, 35(15): 40-43.
CHEN Ming, CHEN Anjun. He's Frequency-Amplitude Formulation Method for Analyzing Dropping Shock Response of Cubic Nonlinear Packaging System[J]. Packaging Engineering, 2014, 35(15): 40-43.
- [9] 郭蓓蓓, 王军. 正切型非线性包装系统跌落冲击响应的同伦摄动法与修正[J]. 振动与冲击, 2018, 37(22): 111-114, 121.
GUO Beibei, WANG Jun. Correction of the Homotopy Perturbation Method for Analyzing Dropping Shock Response of a Tangent Nonlinear Packaging System[J]. Journal of Vibration and Shock, 2018, 37(22): 111-114, 121.
- [10] WU B S, SUN W P, LIM C W. An Analytical Approximate Technique for a Class of Strongly Nonlinear Oscillators[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2006, 41(6/7): 766-774.
- [11] LAI S K, LIM C W, WU B S, et al. Newton-

- Harmonic Balancing Approach for Accurate Solutions to Nonlinear Cubic-Quintic Duffing Oscillators[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(2): 852–866.
- [12] WU B S, LIM C W, SUN W P. Improved Harmonic Balance Approach to Periodic Solutions of Non-Linear Jerk Equations[J]. Physics Letters A, 2006, 354(1/2): 95–100.
- [13] SUN W P, WU B S. Accurate Analytical Approximate Solutions to General Strong Nonlinear Oscillators[J]. Nonlinear Dynamics, 2007, 51(1/2): 277–287.
- [14] WU B S, LIU W J, CHEN X, et al. Asymptotic Analysis and Accurate Approximate Solutions for Strongly Nonlinear Conservative Symmetric Oscillators[J]. Applied Mathematical Modelling, 2017, 49: 243–254.
- [15] 杜兴丹, 陈安军. 非线性包装系统跌落冲击动力学响应分析的 NHB 方法 [J]. 噪声与振动控制, 2018, 38(6): 48–51, 71.
- DU Xingdan, CHEN Anjun. The NHB Method for Dropping Shock Dynamic Response Analysis in Nonlinear Packaging Systems[J]. Noise and Vibration Control, 2018, 38(6): 48–51, 71.
- (责任编辑: 邓 彬)

An Approximate Analytical Method for Dropping Shock Response of Hyperbolic Tangent Nonlinear System

ZHAO Xiaobing¹, DU Xingdan², CHEN Anjun^{2,3}

(1. Wuxi Institute of Metrology and Testing, Wuxi Jiangsu 214101, China;

2. School of Mechanical Engineering, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China;

3. China National Control and Testing Center for Packaging Quality, Wuxi Jiangsu 214122, China)

Abstract: For a typical hyperbolic tangential buffering packaging system, the approximate analytical solution of the system was discussed under the condition of drop impact. The hyperbolic tangent system was simplified to the cubic-quintic nonlinear system, and the dimensionless dynamic equation was obtained by introducing dimensionless parameters. The first-order, second-order and third-order approximate analytical solutions of the system response were obtained by the Newton-harmonic balancing method. Compared with the fourth-order Runge-Kutta numerical solution, the example analysis showed that the third-order approximate solution of the Newton-harmonic balancing method was the closest to the Runge-Kutta numerical solution, and the relative errors of the maximum displacement response, maximum acceleration response and dropping shock duration were controlled within 1%. A new approximate analysis method was provided for the drop impact response analysis of hyperbolic tangential nonlinear packaging system.

Keywords: hyperbolic tangent nonlinear system; newton-harmonic balancing; approximate analytical solution; maximum displacement; maximum acceleration; dropping shock duration