

基于边界单元法的印刷机滚筒结构刚度分析

doi:10.3969/j.issn.1674-7100.2017.04.011

周枫林 李 光
孙 晓 余江鸿

湖南工业大学
机械工程学院
湖南 株洲 412007

摘 要:以实际滚筒模型为分析对象,使用边界单元法(BEM)对该结构进行刚度计算和分析。通过数值算例验证了BEM的正确性和有效性,在此基础上,充分考虑实际工况,应用BEM法分析滚筒在重力作用下的自由变形,并与基于FEM的商用结构分析软件得到的结果进行对比。对比结果显示,BEM法在分析滚筒结构刚度时具有精度高、计算量小以及纯边界离散等特点,是一种应用于结构刚度分析的高效方法。

关键词:边界单元法;印刷机滚筒;结构刚度分析;弹性力学

中图分类号:TM351

文献标志码:A

文章编号:1674-7100(2017)04-0087-06

0 引言

印刷机是包装机械的典型设备^[1]。印刷过程中,滚筒与承印材料相接触,将油墨图文印于承印材料上。滚筒作为印刷机的核心部件,在自身重力作用下易挠曲变形,导致滚筒和承印材料接触不均匀,造成印刷品油墨不均、色调不准等问题。大幅面印刷机的滚筒跨度较大,其挠曲变形更加严重。因此,如何有效补偿滚筒的挠曲变形,以保证接触线上压力均匀,是印刷工程师重点关注的问题。而准确计算滚筒的变形量,是滚筒结构优化设计的基础。刘琳琳等人^[2]应用材料力学理论,推导了滚筒在印刷压力和重力荷载综合作用下的挠曲变形方程,并编写了滚筒挠曲变形的计算程序;余节约等人^[3]分析了印刷压力计算公式的误差;袁清珂等人^[4]应用ANSYS软件对印刷机滚筒进行有限元模态分析,获得了印刷机滚筒的若干阶固有频率,并得到其相应振型;姚齐水等人^[5-6]使用一种预负荷弹性支承方案,有效降低了印刷机滚

筒的挠曲变形量。

上述研究中所使用的分析计算工具以与有限单元法(finite element method, FEM)相关的分析计算软件为主。众所周知,FEM^[7-10]是一种非常有效的结构分析方法,在诸多领域有着广泛应用。然而,FEM在计算结构应力时精度较低。近年来,诸如无网格法^[11]、边界单元法(boundary element method, BEM)^[12-18]等数值方法取得了长足的进步,各个瓶颈问题得到了较好地解决。BEM是建立在边界积分方程理论基础的数值方法,相较于其他数值方法具有多方面的优势,如单元未知数少、数据准备简单等。基于此,本文拟采用BEM对印刷机滚筒结构进行力学分析,计算其在自身重力下的挠曲变形量,并通过设计数值算例,验证BEM的正确性和有效性,同时,通过将BEM的分析结果与FEM的分析结果进行对比,验证BEM在分析实际工况下静力学问题的高精度性和高效性,以期对印刷机滚筒结构设计分析提供一种新的方法。

收稿日期:2017-05-11

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11602082)

作者简介:周枫林(1986-),男,湖南工业大学讲师,博士,主要从事计算力学方面的研究,

E-mail: edwal0zhou@163.com

通信作者:李 光(1963-),男,湖南工业大学教授,博士,主要从事智能包装机械设计与制造方面的研究,

E-mail: 584910230@qq.com

1 边界单元法

在三维弹性力学问题中,用位移表示的平衡方程如下:

$$\begin{cases} Gu_{i,jj} + \frac{G}{1-2\nu} u_{j,ji} + b_i = 0, x \in \Omega; \\ u_i = \bar{u}_i, x \in \Gamma_1; \\ p_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i, x \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (1)$$

式中: G, ν 分别表示材料的剪切模量和泊松比;

$u_{i,jj}$ 表示第 i 方向的位移分别对 3 个方向求二阶偏导数后的和值, 即 $u_{i,jj} = u_{i,11} + u_{i,22} + u_{i,33}$, $u_{i,ji}$ 表示 3 个方向的位移分别对第 j 方向和本身方向求混合二阶偏导后的和值, 即 $u_{i,ji} = u_{1,j1} + u_{2,j2} + u_{3,j3}$, $u_{i,jj}$, $u_{i,ji}$ 满足爱因斯坦求和约定;

b_i 表示 i 方向的体力;

$x(x_1, x_2, x_3)$ 表示空间中的一个点;

Ω 表示弹性体所占区域, 其边界 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_1 为位移边界, Γ_2 为面力边界;

u_i 和 p_i 分别表示 i 方向的位移和面力;

\bar{u}_i 和 \bar{p}_i 分别表示 Γ_1 的位移约束和 Γ_2 上的面力载荷;

σ_{ij} 表示应力分量;

$\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$ 表示边界的外法向量。

弹性力学问题相应的边界积分方程为

$$c_{ij}(y)u_j(y) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(x, y)u_j(x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} u_{ij}^*(x, y)p_j(x)d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(x, y)b_j(x)d\Omega(x) = 0. \quad (2)$$

式中: u_{ij}^*, p_{ij}^* 分别表示位移基本解和面力基本解,

$$u_{ij}^* = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} + r_i r_j \right], \quad (3)$$

$$p_{ij}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_i r_j \right] - (1-2\nu)(r_i n_j(y) - r_j n_i(y)) \right\}, \quad (4)$$

其中 $r(x, y)$ 表示两点之间的欧几里得距离, x, y 分别表示源点和场点, 式 (3) 位移基本解满足相应的伴随方程,

$$Gu_{i,jj}^*(x, y) + \frac{G}{1-2\nu} u_{j,ji}^*(x, y) = \delta_{ij} \delta(x, y), \quad (5)$$

其中 $u_{i,jj}^*, u_{j,ji}^*$ 满足爱因斯坦求和约定, 若 $i=j$, 则 $\delta_{ii}=1$, 其他情况, $\delta_{ii}=0$, $\delta(x, y)$ 表示常规意义下的 delta 函数;

$c_{ij}(y)$ 表示与场点相关的系数, 当 y 位于光滑边界上时, 有

$$c_{ij}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & l=j, \\ 0, & l \neq j, \end{cases} \quad (6)$$

当 y 位于边界角点时, 有

$$c_{ij}(y) = \begin{cases} \frac{\theta}{4\pi}, & l=j, \\ 0, & l \neq j, \end{cases} \quad (7)$$

其中 θ 表示角点的立体角,

当 y 位于问题域内部时, 有

$$c_{ij}(y) = \begin{cases} 1, & l=j, \\ 0, & l \neq j. \end{cases} \quad (8)$$

不考虑体力的情况下, 边界积分方程 (2) 中只含边界积分, 可以通过边界离散, 将连续分布的位移和面力写成如下形式:

$$u_j(x_1, x_2, x_3) = u_j(v, w) = u_j(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^m N_k(\xi, \eta) u_{jk}, \quad (9)$$

$$p_j(x_1, x_2, x_3) = p_j(v, w) = p_j(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^m N_k(\xi, \eta) p_{jk}. \quad (10)$$

式中: (v, w) 表示边界曲面的参数坐标, 在 CAD 软件中, 实体的表达都是采用 B-rep 结构, 即用边界信息表示, 当边界为曲面时, 采用参数化曲面表示;

(ξ, η) 表示参数曲面经过离散之后, 每个单元所对应的正则化参数坐标, 在单元内部, 位移和应力的插值拟合均采用该套坐标;

m 表示每个单元插值点数量;

$N_k(\xi, \eta)$ 表示单元内第 k 个插值点所对应的插值形函数;

u_{jk} 和 p_{jk} 分别表示第 k 个插值点处位移的第 j 个分量和面力的第 j 个分量。

将场点取遍所有的插值点, 结合边界条件, 得到 $3N \times 3N$ 规模的线性方程组, 其中 N 为总的插值点数量。通过计算机求解, 可以得到边界上未知的位移或面力值。而弹性体内任意一点的位移、应力以及应变值可以通过式 (2) 计算得到。

2 印刷机滚筒刚度分析

典型的印刷机滚筒结构的简化模型如图 1 所示。

滚筒的主体结构为圆柱体, 半径为 197 mm, 筒长为 1 850 mm, 开孔孔径为 50 mm, 轴向开槽以放置和安装其他部件。滚筒材质为灰铸铁 HT200, 密度为 $7.2 \times 10^3 \text{ g/cm}^3$, 弹性模量为 75 GPa, 泊松比为 0.25。

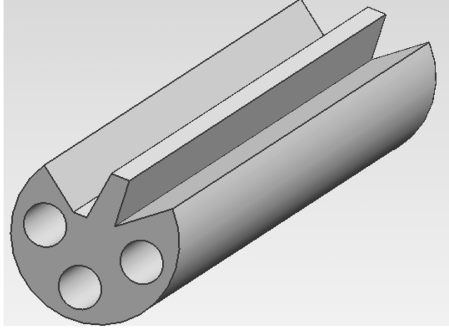


图 1 印刷滚筒结构示意图

Fig. 1 Structure of the printing cylinder

2.1 理想工况验证算例

为验证 BEM 的正确性, 本文利用该方法对印刷机滚筒结构进行弹性静力学分析。假设材料的弹性模量为 1 GPa, 材料密度为 1 g/cm^3 , 泊松比为 0.25, 边界上 3 个方向的位移如下:

$$\begin{cases} u_1 = -2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2, \\ u_2 = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2, \\ u_3 = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2. \end{cases} \quad (11)$$

通过式 (11) 得到 6 个应力分量随着空间的变化关系式。本算例具有解析解, 其应力解如下:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -1.6(3x_1 + x_2 + x_3), \\ \sigma_{22} = -1.6(x_1 + 3x_2 + x_3), \\ \sigma_{33} = -1.6(x_1 + x_2 + 3x_3); \\ \sigma_{12} = 2.4(x_1 + x_2), \\ \sigma_{13} = 2.4(x_1 + x_3), \\ \sigma_{23} = 2.4(x_2 + x_3). \end{cases} \quad (12)$$

本算例数值计算过程中, 针对柱面和端面分别采用不同类型的单元。在柱面上采用非连续四边形 Lagrange 单元, 在端面上采用三角形常值单元, 如图 2 所示。

通过增加计算节点数, 将计算所得节点面力结果与通过精确解得到的精确面力结果进行比较, 得到其误差值。误差定义为:

$$e = \frac{1}{|t|_{\max}} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (t_i^e - t_i^n)^2}, \quad (13)$$

式中: e 表示误差;

t 表示所关注的物理量, 如表面节点上 3 个方向的面力 T_1, T_2, T_3 等;

t_i^e 表示 i 方向的精确结果;

t_i^n 表示 i 方向的数值计算结果。

两种方法的 T_1, T_2, T_3 相对误差值见表 1, 其收敛情况如图 3 所示。

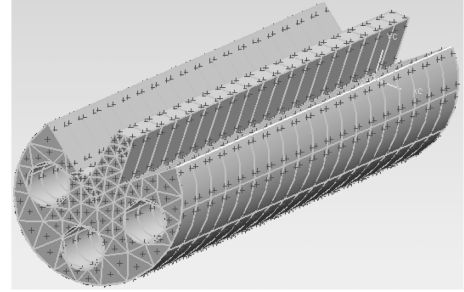


图 2 边界单元法计算网格

Fig. 2 Computational mesh in BEM

表 1 计算节点误差收敛情况

Table 1 Convergence of computation error

序号	单元数量	节点数量	误差 /%		
			T_1	T_2	T_3
1	414	1 062	4.45	4.12	3.89
2	528	1 518	3.07	3.00	2.37
3	654	2 022	2.71	2.60	2.05
4	823	2 650	2.25	2.03	1.68
5	927	3 066	2.08	1.93	1.63

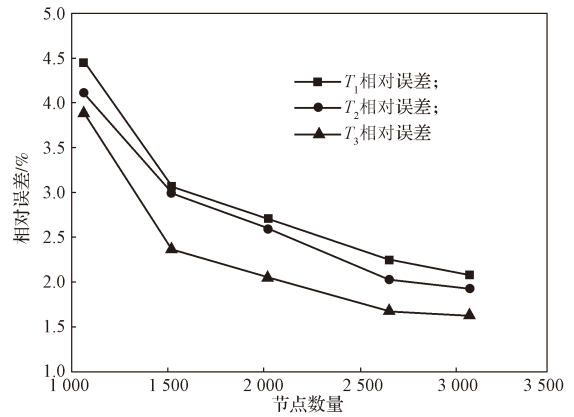


图 3 边界单元法的应力计算收敛情况

Fig. 3 Relative error of computed traction on boundary nodes

由图 3 和表 1 可知, 随着网格加密, 计算节点数量的增加, 使用边界单元法计算所得的 3 个方向的面力结果能够稳定地收敛到精确结果, 说明在分析滚筒结构弹性问题时, BEM 是有效的; 在本算例中, 采用非连续单元对物理量进行拟合, 进一步验证

了 BEM 对表面数据拟合的连续性要求较低;本算例在不同边界表面使用不同形状的单元,充分显示了 BEM 法网格的灵活性。

2.2 某印刷滚筒静置时的挠曲变形分析

在假想工况下(即边界条件和解析解都可以用简单多项式表示),利用 BEM 对印刷机滚筒结构进行弹性静力学分析是正确、有效的。为验证 BEM 在实际工况下的实用性,本文采用 BEM 法进一步分析上述滚筒在两端面受简支,考虑重力情况下的自由变形情况。结构物理参数采用实际滚筒的相应参数值,分别使用 BEM 和 FEM 计算滚筒在重力作用下的挠曲变形。在 ANSYS 软件中, FEM 的网格模型如图 4 所示。

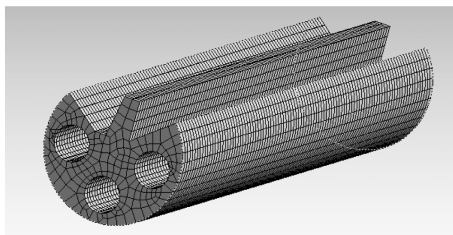


图 4 FEM 网格模型图

Fig. 4 FEM mesh

为得到较精准的变形情况,在 FEM 法分析中,使用 18 216 个高阶六面体单元,共计 92 154 个计算节点。经 FEM 计算得到的在重力方向的变形云图如图 5 所示。由图可知,沿轴向的挠度分布特点为中间大、两端小,这与传统的材料力学知识相符,中间处最大位移为 0.008 mm。

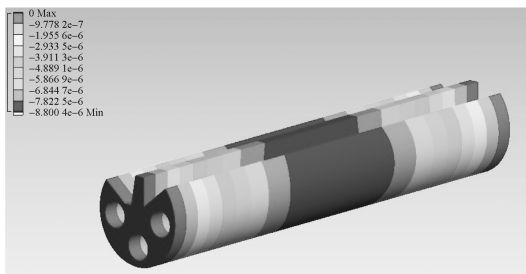


图 5 FEM 法计算所得的变形图

Fig. 5 Contour of deformation obtained by FEM

在 BEM 分析过程中,使用 927 个的混合单元(与上例相同),共计 3 066 个节点。在滚筒下沿沿轴向均匀布置 11 个取样点(点的位置见表 2)。表 3 列出了两种方法计算所得重力方向位移的计算结果。取样点上重力方向位移分布如图 6 所示。

由表 3 和图 6 可知,使用 BEM 计算得到的挠度

曲线与使用 FEM 计算所得挠度曲线的高度,从具体数值来看,两种方法所得结果的误差小于 1%。该算例充分说明了 BEM 在实际工程下分析滚筒结构刚度的准确性和可行性。

表 2 取样点坐标

Table 2 Coordinates of sample points

序号	坐标	序号	坐标
1	(0, -197, 0)	7	(0, -197, 1 110)
2	(0, -197, 185)	8	(0, -197, 1 295)
3	(0, -197, 370)	9	(0, -197, 1 480)
4	(0, -197, 555)	10	(0, -197, 1 665)
5	(0, -197, 740)	11	(0, -197, 1 850)
6	(0, -197, 925)		

表 3 计算结果比较

Table 3 Comparison between FEM and BEM

序号	挠曲变型量/(10 ⁻³ mm)	
	FEM	BEM
1	0.00	0.00
2	-2.93	-2.88
3	-5.28	-5.23
4	-7.04	-6.95
5	-8.21	-8.14
6	-8.80	-8.78
7	-8.20	-8.15
8	-7.04	-6.96
9	-5.29	-5.23
10	-2.94	-2.88
11	0.00	0.00

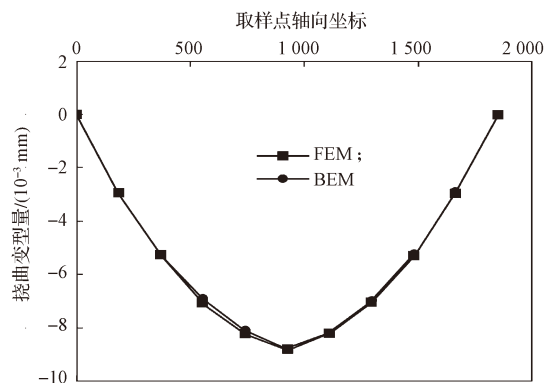


图 6 FEM 与 BEM 计算结果比较

Fig. 6 Results comparison between the FEM and the BEM

3 结语

本文介绍了应用于印刷机滚筒结构刚度分析的 BEM,该方法具有边界离散、网格灵活、计算效率

高等特点。通过设计理想算例,验证了利用BEM计算滚筒结构应力时的正确性。针对实际工况,对比BEM和FEM的分析结果,证明了BEM的计算精度高和计算效率高等优点。可见,BEM是一种适用于印刷机滚筒结构刚度计算的新方法。在印刷机设计中,使用BEM对滚筒结构进行分析,得到滚筒变形曲线,再根据计算结果进行挠度补偿设计,以保证印刷机在工作时滚筒与印纸的接触压力均匀,提高印刷质量。

参考文献:

- [1] 赵凯辉,何静,李祥飞,等.包装印刷用永磁同步电机控制及无速度传感器控制技术综述[J].包装学报,2017,9(1):13-20.
ZHAO Kaihui, HE Jing, LI Xiangfei, et al. Review of Permanent Magnet Synchronous Motor Control and Sensorless Technology for Packaging and Printing[J]. Packaging Journal, 2017, 9(1): 13-20.
- [2] 刘琳琳,成刚虎,刘国栋.基于变截面梁积分的印刷滚筒挠曲计算[J].轻工机械,2007,25(6):24-26.
LIU Linlin, CHENG Ganghu, LIU Guodong. Calculation on Deflection of Printing Cylinder Based on Integration to Variable Cross Section Beam[J]. Light Industry Machinery, 2007, 25(6): 24-26.
- [3] 余节约,田培娟.印刷压力计算的误差分析[J].包装工程,2008,29(7):99-101.
YU Jieyue, TIAN Peijuan. Error Analysis of Printing Pressure Calculation[J]. Packaging Engineering, 2008, 29(7): 99-101.
- [4] 袁清珂,杜亚男,王同乐,等.印刷机滚筒的模式分析[J].包装工程,2011,32(15):102-105.
YUAN Qingke, DU Yanan, WANG Tongle, et al. Modal Analysis of Printing Cylinder[J]. Packaging Engineering, 2011, 32(15): 102-105.
- [5] 姚齐水,张然,明兴祖,等.弹性复合圆柱滚子轴承静态径向刚度分析[J].中国机械工程,2013,24(22):3085-3089.
YAO Qishui, ZHANG Ran, MING Xingzu, et al. Static Radial Stiffness Analysis of Elastic Composite Cylindrical Roller Bearing[J]. China Mechanical Engineering, 2013, 24(22): 3085-3089.
- [6] 姚齐水,李超,王勇,等.基于预负荷弹性支承的印刷滚筒承载性能研究[J].中国机械工程,2015,26(23):3214-3220.
YAO Qishui, LI Chao, WANG Yong, et al. Research on Bearing Behaviors of Printing Cylinder Based on Preload Elastic Supporting[J]. China Mechanical Engineering, 2015, 26(23): 3214-3220.
- [7] 杨新艳.胶印机压印滚筒的有限元分析[D].西安:西安理工大学,2006.
YANG Xinyan. The Finite Element Analysis of Impressing Cylinder on Offset Press[D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2006.
- [8] 王进堂.基于印刷机滚筒轴承接触问题的有限元分析[D].西安:西安理工大学,2009.
WANG Jintang. The Finite Element Analysis Basing on The Contact Problem for Cylinder Roller Bearing of Printing Machine[D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2009.
- [9] 王勖成.有限单元法[M].北京:清华大学出版社,2002:1-40.
WANG Xucheng. Finite Element Method[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 1-40.
- [10] 龙述尧,崩行成,刘腾喜.计算力学[M].长沙:湖南大学出版社,2001:7-20.
LONG Shuyao, KUAI Xingcheng, LIU Tengxi. Computational Mechanics[M]. Changsha: Hunan University Press, 2001: 7-20.
- [11] 张雄,刘岩.无网格法[M].北京:清华大学出版社,2004:21-40.
ZHANG Xiong, LIU Yan. Meshless Methods[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 21-40.
- [12] 姚寿广.边界元数值方法及其工程应用[M].北京:国防工业出版社,1995:11-38.
YAO Shouguang. Boundary Element Methods and Its Engineering Applications[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1995: 11-38.
- [13] 张见明.基于边界面法的完整实体应力分析理论与应用[J].计算机辅助工程,2010,19(3):5-10.
ZHANG Jianming. Theory and Application of Stress Analysis on Complete Solids Based on Boundary Face Method[J]. Computer Aided Engineering, 2010, 19(3): 5-10.
- [14] 覃先云,张见明,李光耀,等.边界面法分析三维实体线弹性问题[J].固体力学学报,2011,32(5):500-506.
QIN Xianyun, ZHANG Jianming, LI Guangyao, et al. Analysis of 3D Linear Elasticity Problems Directly on Geometric Model with the Boundary Face Method[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2011, 32(5): 500-506.
- [15] ZHOU F L, ZHANG J M, SHENG X M, et al. A Dual Reciprocity Boundary Face Method for 3D Non-

- Homogeneous Elasticity Problems[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2012, 36(9): 1301–1310.
- [16] ZHANG J M, QIN X Y, HAN X, et al. A Boundary Face Method for Potential Problems in Three Dimensions[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 80(3): 320–337.
- [17] ZHOU F L, ZHANG J M, SHENG X M, et al. Shape Variable Radial Basis Function and Its Application in Dual Reciprocity Boundary Face Method[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2011, 35(2): 244–252.
- [18] 尹 欣. 三维弹性问题边界元法并行计算及其工程应用[D]. 北京: 清华大学, 2000.
- YIN Xin. Parallel Computation of 3D Elastic Problems with BEM and Its Engineering Application[D]. Beijing: Tsinghua University, 2000.

Structural Rigidity Analysis of Printing Cylinder Based upon Boundary Element Method

ZHOU Fenglin, LI Guang, SUN Xiao, YU Jianghong

(School of Mechanical Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

Abstract: A practical printing cylinder was analyzed in the aspect of structural rigidity computation through the BEM. Convergence study of the result was also performed to illustrate the validity and efficiency of the presented method. The free deformation of printing cylinder under gravity was analyzed by BEM with the practical working conditions considered. Results obtained from both of the FEM and BEM were compared. The comparison showed the advantages of BEM for practical structural analysis as boundary only discretization, lower cost of computation and high precision, which presented a new highly accurate method for printing cylinder deformation analysis.

Keywords: boundary element method; printing cylinder; structural deformation analysis; elasticity