

# 两自由度强滞后非线性系统梯形脉冲的冲击研究

高德, 卢富德, 王振林

(浙江大学宁波理工学院 包装工程研究所, 浙江 杭州 310027)

**摘要:** 建立了两自由度的滞后非线性包装缓冲模型, 得到系统的振动方程, 经过一系列变换得到振动微分方程的状态变量, 运用四阶变步长 Runge-Kutta 方法, 算出此非线性系统在梯形脉冲冲击下的冲击响应谱, 得出质量比 $\beta_1$ 、刚度比 $\beta_2$ 对冲击谱曲面的影响。冲击谱曲面能全面反映包装系统在不同无量纲冲击时间 $\tau_0$ 作用下的影响规律。

**关键词:** 两自由度; 滞后非线性; 冲击谱

中图分类号: TB485.1

文献标志码: A

文章编号: 1674-7100(2011)01-0011-04

## The Research of the Trapezoidal Pulse Impact on the 2-DOF Non-Linear System with Strong Hysteresis

Gao De, Lu Fude, Wang Zhenlin

(Ningbo Institute of Technology, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

**Abstract:** The packaging buffer model of 2-DOF non-linear system with strong hysteresis was established and the vibration equations for the system were gained. After a series of transform, the state variables of the vibration differential equations were obtained. The response spectrum of non-linear system under the trapezoidal pulse shock was calculated using the fourth order variable step Runge-Kutta method. The influence of mass ratio ( $\beta_1$ ), stiffness ( $\beta_2$ ) on the surface of response spectrum, which can fully reflect the dimensionless impact time ( $\tau_0$ ) on the packaging system of law, was studied.

**Key words:** 2-DOF; hysteretic nonlinearity; shock spectrum

## 0 引言

近年来, 关于两自由度包装冲击问题方面的研究报导较多, 如王志伟、王军等人分别研究了易损件的正切、双曲正切等包装系统在矩形脉冲、半正弦脉冲、后峰锯齿脉冲激励作用下的冲击特性, 得到了它们对系统的影响规律<sup>[1-6]</sup>; 卢富德等人对立方非线性双层包装件在矩形方波冲击下的破损边界曲线进行了研究<sup>[7]</sup>; 高德等人研究了具有转动包装系统的正切非线性模型冲击响应<sup>[8]</sup>。但是, 目前尚未见对强滞后非线性包装系统在各种脉冲激励下的冲击响应进行研究的报导, 所以本文拟对此进行探讨。

本研究基于两自由度的滞后非线性包装系统, 用三次多项式来表示系统的滞后力, 研究该包装系统在梯形波冲击下的冲击谱曲面。并讨论质量比 $\beta_1$ 和刚度比 $\beta_2$ 对冲击谱曲面的影响, 以期研究此模型的破损边界曲面奠定一定的基础, 并且为其它模型提供参考依据。

## 1 两自由度滞后非线性包装系统冲击模型

两自由度滞后非线性包装系统中, 产品系统受等腰梯形脉冲持续激励时间为 $t_0$ , 上层产品与下层产品

收稿日期: 2010-12-16

作者简介: 高德(1963-), 男, 黑龙江青冈人, 浙江大学宁波理工学院教授, 主要从事包装动力学方面的研究,

E-mail: gaode63@163.com

之间用三次非线性缓冲材料 1 表示, 下层产品与外包装箱之间用三次非线性缓冲材料 2 表示, 实验过程中不考虑外包装箱的质量。其简化后的数学模型如图 1 所示。

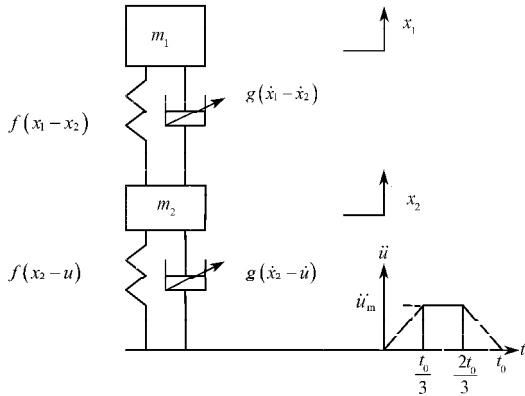


图 1 两自由度滞后非线性包装系统示意图

Fig. 1 Diagram of hysteretic nonlinear system with two-of-degree of freedom

图 1 中,  $m_1$  为上层产品的质量,  $m_2$  为下层产品的质量,  $f(x_1-x_2)$  为上、下层物品之间的包装衬垫的弹性力函数,  $f(x_2-u)$  为下层物品与包装盒底部之间的包装衬垫的弹性力函数;  $g(\dot{x}_1-\dot{x}_2)$  为上下层物品之间的缓冲衬垫的滞后力函数,  $g(\dot{x}_2-\dot{u})$  为下层物品与包装盒底部之间的缓冲衬垫的滞后力函数。

图 1 所示系统的三次弹性力函数为:

$$f(x) = kx + rx^3, \quad i=1, 2, \quad (1)$$

式中:

$k_i$  为第  $i$  层物品衬垫的线性刚度;

$r_i$  为第  $i$  层物品衬垫的材料增长率。

因非线性滞后力用三次多项式表示, 所以

$$g(\dot{x}) = c_i\dot{x} + d_i\dot{x}^3, \quad i=1, 2, \quad (2)$$

式中:

$c_i$  为第  $i$  层衬垫的阻尼系数;

$d_i$  为第  $i$  层衬垫的滞后系数。

包装系统所受的梯形加速度激励可表示为:

$$\ddot{u} = \begin{cases} \frac{3\ddot{u}_m t}{t_0}, & t \leq \frac{t_0}{3}; \\ \ddot{u}_m, & \frac{t_0}{3} < t \leq \frac{2t_0}{3}; \\ 3\ddot{u}_m \left(1 - \frac{t}{t_0}\right), & \frac{2t_0}{3} < t \leq t_0; \\ 0, & t > t_0. \end{cases} \quad (3)$$

由牛顿第二定律, 可得如下系统包装冲击的微分方程:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) + \eta_1(x_1 - x_2)^3 + \\ c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + d_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^3 = 0, \\ m\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - u) + r_2(x_2 - u)^3 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{u}) + \\ d_2(\dot{x}_2 - \dot{u})^3 - k_1(x_1 - x_2) - \eta_1(x_1 - x_2)^3 - \\ c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - d_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^3 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

该系统的初始条件为:  $x_{1,2}(0) = \dot{x}_{1,2}(0) = 0$ 。

对式 (4) 变形可得如下冲击的无量纲表达式:

$$\begin{cases} y_1'' + (y_1 - y_2) + (y_1 - y_2)^3 + 2\xi_1(y_1' - y_2') + \\ \frac{\gamma_1 L^2}{T} (y_1' - y_2')^3 = -\frac{u''}{L}, \\ y_1'' + \frac{\beta_1}{\beta_2} y_2 + \frac{\beta_1}{\beta_3} y_2^3 + 2\xi_1 \frac{\beta_1}{\beta_5} y_2' + \\ \frac{\gamma_1 L^2}{T} \frac{\beta_1}{\beta_4} y_2'^3 - \beta_1(y_1 - y_2) - \beta_1(y_1 - y_2)^3 - \\ 2\xi_1 \beta_1 (y_1' - y_2') - \frac{\beta_1 \gamma_1 L^2}{T} (y_1' - y_2')^3 = -\frac{u''}{L}. \end{cases} \quad (5)$$

式 (5) 对应的初始条件为:  $y_{1,2}(0) = y_{1,2}'(0) = 0$ 。

且式 (5) 中:

$L$  为长度单位, 且  $L = \sqrt{\frac{k_1}{r_1}}$ ;

$T$  为时间单位, 且  $T = \sqrt{\frac{m_1}{k_1}}$ ;

$\xi_1$  为上层衬垫的阻尼率, 且  $\xi_1 = \frac{c_1}{2\sqrt{m_1 k_1}}$ ;

$\xi_2$  为下层衬垫的阻尼率, 且  $\xi_2 = \frac{c_2}{2\sqrt{m_2 k_2}}$ ;

$y_1$  为上层产品相对基础的位移, 且  $y_1 = \frac{x_1 - u}{L}$ ;

$y_2$  为下层产品相对基础的位移, 且  $y_2 = \frac{x_2 - u}{L}$ ;

$\gamma_1$  和  $\gamma_2$  为系统参数, 且  $\gamma_1 = \frac{d_1}{m_1}$ ,  $\gamma_2 = \frac{d_2}{m_2}$ ;

$\tau$  为无量纲时间, 且  $\tau = \frac{t}{T}$ ;

$y' = \frac{dy}{d\tau}$ ,  $y'' = \frac{d^2 y}{d\tau^2}$ ;

$\beta_1$  为两层产品的质量比, 即  $\beta_1 = \frac{m_1}{m_2}$ ;

$\beta_2$  为两层产品的刚度比, 即  $\beta_2 = \frac{k_1}{k_2}$ ;

$\beta_3$  为两层产品的材料增长率之比, 即  $\beta_3 = \frac{r_1}{r_2}$ ;

$\beta_4$  为系统滞后系数比, 即  $\beta_4 = \frac{d_1}{d_2}$ ;

$\beta_5$  为系统的阻尼系数之比, 即  $\beta_5 = \frac{c_1}{c_2}$ 。

$$u'' = \begin{cases} 3T^2\ddot{u}_m \frac{\tau}{\tau_0}, & \tau \leq \frac{\tau_0}{3}; \\ T^2\ddot{u}_m, & \frac{\tau_0}{3} < \tau \leq \frac{2\tau_0}{3}; \\ 3T^2\ddot{u}_m \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right), & \frac{2\tau_0}{3} < \tau \leq \tau_0; \\ 0, & \tau > \tau_0. \end{cases} \quad (6)$$

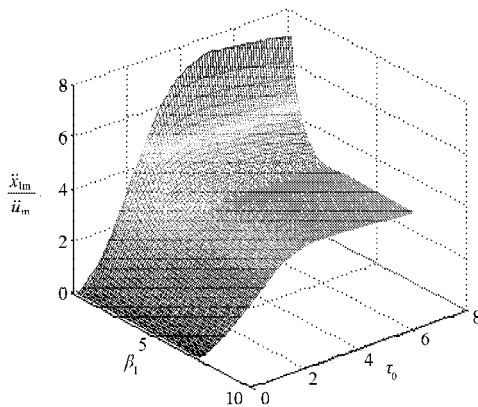
式中:  $\tau_0 = \frac{t_0}{T}$ 。

## 2 数值计算结果及讨论

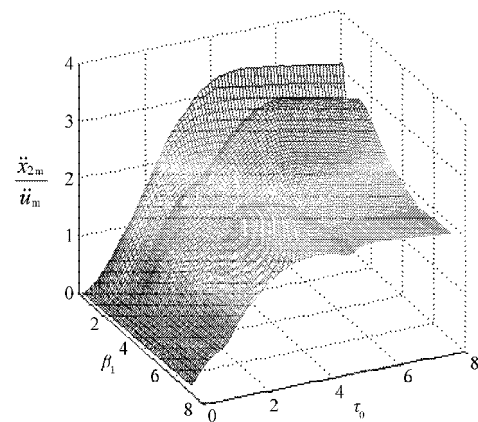
由龙格-库塔法,可求出产品最大加速度响应值  $\ddot{x}_{1m}/\ddot{u}_m, \ddot{x}_{2m}/\ddot{u}_m$ , 并以此作为z轴, 以某个参数作为x轴, 以无量纲脉冲持续时间  $\tau_0$  为y轴, 可得到系统的三维冲击谱。

### 2.1 质量比 $\beta_1$ 对包装产品冲击谱的影响

研究系统的质量比  $\beta_1$  对包装产品冲击谱的影响时, 限定参数如下:  $m_1=3, k_1=20, k_2=10, r_1=6, r_2=8, c_1=0.001, c_2=1, d_1=0.05, d_2=0.01, \ddot{u}_m=4, \beta_1=0.1\sim 7$ 。实验所得质量比  $\beta_1$  对包装产品冲击谱的影响如图2所示。



a) 上层冲击谱曲面



b) 下层冲击谱曲面

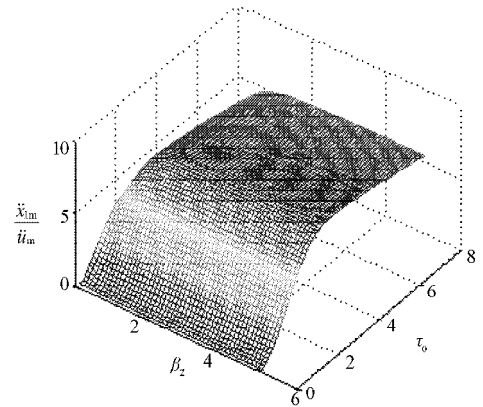
图2 质量比  $\beta_1$  对冲击谱的影响

Fig. 2 The effect of  $\beta_1$  on shock response spectrum surface

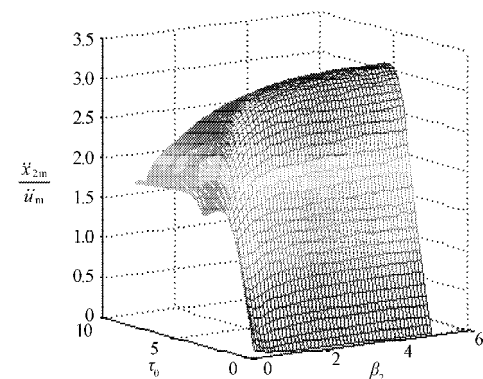
由图2所示两自由度包装系统上、下层产品的冲击谱表明, 当产品的质量比  $\beta_1$  很小, 无量纲脉冲持续时间  $\tau_0$  很大时, 产品的加速度响应值最大。在由  $\beta_1=0.1\sim 0.243, \tau_0=3.2\sim 8$  所围成的区域中, 上层的冲击谱有最大值,  $\ddot{x}_{1m}/\ddot{u}_m$  为  $6.8\sim 7$ , 故称这个区域为危险区。在由质量比  $\beta_1=1.2\sim 1.9, \tau_0=4.4\sim 6.1$  所围成的区域中,  $\ddot{x}_{2m}/\ddot{u}_m=3$ , 这个区域称为对下层的危险区。

### 2.2 刚度比 $\beta_2$ 对包装产品冲击谱的影响

研究系统的刚度比  $\beta_2$  对包装产品冲击谱的影响时, 限定如下参数:  $m_1=2, m_2=6, k_1=7, k_2=12, r_1=6, r_2=8, c_1=0.1, c_2=0.005, d_1=0.05, d_2=0.01, \beta_1=0.1\sim 5, \ddot{u}_m=10$ 。实验所得到的刚度比  $\beta_2$  对包装产品冲击谱的影响结果如图3所示。



a) 上层冲击谱曲面



b) 下层冲击谱曲面

图3 刚度比  $\beta_2$  对冲击谱的影响

Fig. 3 The effect of  $\beta_2$  on Shock response spectrum surface

图3表明: 上层冲击谱曲面比较平滑, 没有极大值, 见图3中a)图, 所以图3所显示的危险区范围较大, 上层产品的危险范围位于由  $\beta_2=0.2\sim 5, \tau_0=3\sim 5$  所围成的区域中; 下层产品的危险范围位于由  $\beta_2=1.1\sim 5, \tau_0=3\sim 5$  所围成的近似椭圆的区域中。

### 3 结 论

对于在梯形脉冲作用下的滞后非线性包装系统,影响其上层冲击谱的主要因素为质量比 $\beta_1$ 。

1) 增大质量比 $\beta_1$ 有利于降低上层冲击谱峰值。由图2、图3中的a)图所知, $\beta_1 > 0.83$ ,上层冲击谱峰值迅速下降; $0 < \beta_1 < 0.83$ 为上层冲击谱的敏感区,在这一区域,峰值下降很快。

2)  $\beta_1=1$ 处是下层冲击谱曲面的坡谷,是冲击谱峰值的最低点,这是缓冲包装设计的最佳点。

#### 参 考 文 献:

- [1] 王志伟,武冬雁,钱静. 矩形脉冲激励下正切型非线性包装系统的冲击响应[J]. 振动与冲击, 1999, 18(3): 48-51.  
Wang Zhiwei, Wu Dongyan, Qian Jing. Optimizing Design of Acoustic Splitter[J]. Journal of Vibration and Shock, 1999, 18(3): 48-51.
- [2] 王军,王志伟. 半正弦脉冲激励下考虑易损件的正切型包装系统冲击特性研究[J]. 振动与冲击, 2008, 27(1): 167-168, 173.  
Wang Jun, Wang Zhiwei. 3-Dimensional Shock Response Spectra Characterizing Shock Response of A Tangent Packaging System with Critical Components[J]. Journal of Vibration and Shock, 2008, 27(1): 167-168, 173.
- [3] 贡晓婷,王志伟. 双曲正切包装系统在后峰锯齿脉冲作用下的冲击特性[J]. 振动与冲击, 2000, 19(1): 44-45.  
Gong Xiaoting, Wang Zhiwei. The Shock Characteristics of Hyperbolic Tangent Packaging System under the Action of Final Peak Saw Tooth Shock Pulse[J]. Journal of Vibration and Shock, 2000, 19(1): 44-45.
- [4] 王军. 产品破损评价及其防护包装动力学理论研究[D]. 无锡: 江南大学, 2009.  
Wang Jun. Theoretical Study on Product Damage Evaluation and Protective Packaging Dynamics[D]. Wuxi: Jiangnan University, 2009.
- [5] 王军,王志伟. 多层堆码包装系统冲击动力学特性研究(I)组合冲击谱[J]. 振动与冲击, 2008, 27(8): 106-107, 120.  
Wang Jun, Wang Zhiwei. Combined Shock Spectrum of Linear Stacking Packaging System[J]. Journal of Vibration and Shock, 2008, 27(8): 106-107, 120.
- [6] 王军,卢立新,王志伟,等. 矩形脉冲激励下正切型包装系统关键部件破损曲面研究[J]. 包装学报, 2010, 2(1): 14-17.  
Wang Jun, Lu Lixin, Wang Zhiwei, et al. Damage Boundary Surface of Tangent Nonlinear Packaging System with Critical Component[J]. Packaging Journal, 2010, 2(1): 14-17.
- [7] 卢富德,高德,梁爱锋. 立方非线性双层包装在矩形方波冲击下破损边界曲线的研究[J]. 包装工程, 2009, 29(2): 7-10.  
Lu Fude, Gao De, Liang Aifeng. Study of Damage Boundary Curve of Cubic Non-Linear Double Layer Package under Rectangular Pulse[J]. Packaging Engineering, 2009, 29(2): 7-10.
- [8] 高德,卢富德. 具有转动包装系统的正切非线性模型冲击响应研究[J]. 振动与冲击, 2010, 29(10): 138-144.  
Gao De, Lu Fude. Shock Response of A Nonlinear Tangent Packaging System with Rotation[J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29(10): 138-144.

(责任编辑: 廖友媛)